

## THESIS / THÈSE

### MASTER EN SCIENCES MATHÉMATIQUES

#### Stabilisation positive de systèmes différentiels linéaires: théorie et application aux réacteurs tubulaires

DEHAYE, Jonathan

*Award date:*  
2011

[Link to publication](#)

#### General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal ?

#### Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

Stabilisation positive  
de systèmes différentiels linéaires :  
théorie et application aux réacteurs tubulaires

Jonathan Dehaye

4 janvier 2011



*Je remercie tout d'abord mon promoteur, Monsieur Joseph Winkin, pour ses nombreux conseils, sa disponibilité et l'aide précieuse qu'il m'a apportée.*

*Je tiens également à remercier les professeurs et assistants du département pour le temps qu'ils m'ont accordé et pour leurs suggestions qui m'ont été fort utiles.*

*Enfin, je remercie toutes les personnes de mon entourage, famille et amis, pour leur soutien, leur patience et les nombreuses bonnes idées qui m'ont aidé lors de la rédaction de ce mémoire.*



# **Stabilisation positive de systèmes différentiels linéaires : théorie et application aux réacteurs tubulaires**

## **Résumé :**

Ce mémoire traite de la stabilisation positive de systèmes LTI (linéaires temps-invariants) positifs. Dans un premier temps, nous fournissons des conditions nécessaires et suffisantes pour la stabilisabilité de tels systèmes, via l'étude de polytopes et des ensembles de sommets qui leur sont inhérents. Cette partie se conclut par la construction d'un algorithme synthétisant les résultats principaux développés jusque-là, et permettant de tester la stabilisabilité positive de systèmes positifs et de concevoir - si cela est possible - une matrice de gain pour la stabilisation positive du système. Dans un second temps, nous étudions un cas particulier de système positif et y appliquons la théorie développée dans la première partie. Plus précisément, il s'agit de deux modèles de réacteur tubulaire - le réacteur à écoulement piston et le réacteur à dispersion axiale - qui sont initialement décrits par des équations aux dérivées partielles. Nous discrétisons tout d'abord le système pour obtenir un modèle en dimension finie, puis analysons ce modèle via l'approche développée dans la première section.

## **Abstract :**

This work deals with the positive stabilization of positive LTI (linear time-invariant) systems. First, we provide necessary and sufficient conditions for the stabilizability of such systems, via the study of polytopes and the corresponding sets of vertices. This part ends with the design of an algorithm synthesizing the main results developed so far, and allowing to check the positive stabilizability of positive systems and to design - if possible - a gain matrix for the positive stabilization of the system. Secondly, we study a particular case of positive system and apply to it the theory developed in the first part. More precisely, it concerns two tubular reactor models - namely plug-flow and axial dispersion reactors - which are initially described by partial differential equations. First, we discretize the system to obtain a finite-dimensional model, and then we analyze this model via the approach developed in the first section.



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>1 Préambule</b>	<b>5</b>
1.1 Cadre de travail et définitions préliminaires . . . . .	5
1.2 Positivité d'un système . . . . .	6
1.3 Stabilité et stabilisabilité d'un système . . . . .	14
<b>2 Etude des systèmes positifs SISO</b>	<b>16</b>
2.1 Conditions nécessaires et suffisantes pour la stabilisabilité de sys- tèmes LTI positifs SISO . . . . .	16
2.2 Stabilisation de l'état estimé . . . . .	23
<b>3 Etude des systèmes positifs MIMO</b>	<b>25</b>
3.1 Conditions nécessaires et suffisantes pour la stabilisabilité de sys- tèmes LTI positifs MIMO . . . . .	25
3.2 Algorithme . . . . .	34
3.3 Stabilisation de l'état estimé . . . . .	36
<b>4 Application aux modèles de réacteur tubulaire</b>	<b>38</b>
4.1 Modélisation du système . . . . .	38
4.2 Discrétisation du modèle . . . . .	40
4.3 Approche analytique . . . . .	45
4.4 Approche numérique . . . . .	48
4.4.1 Etude des systèmes de base et contrôlé . . . . .	49
4.4.2 Stabilisation du système perturbé . . . . .	76
<b>Conclusion</b>	<b>100</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>102</b>
<b>Annexe</b>	<b>103</b>



## Notations

Dans cette section, nous définissons les notations principales utilisées dans ce mémoire.

Par convention, les lettres minuscules - utilisées dans un contexte approprié - dénoteront des scalaires et des vecteurs, tandis que les lettres majuscules dénoteront des matrices.

$\underline{n}$  désigne l'ensemble des nombres entiers positifs compris entre 1 et  $n$ , i.e.  $\underline{n} = \{1, \dots, n\}$ .

$\sigma(A)$  désigne l'ensemble des valeurs propres de la matrice  $A$ .

$\lambda_i(A)$  désigne la  $i^{\text{e}}$  valeur propre de la matrice  $A$ .

$a_{ij}$  désigne la  $ij^{\text{e}}$  entrée de la matrice  $A$ .

$[A]^i$  désigne la matrice  $A$  dont la  $i^{\text{e}}$  ligne et la  $i^{\text{e}}$  colonne ont été enlevées.

$rg(A)$  désigne le rang de la matrice  $A$ .

$A \geq 0$  signifie que toutes les entrées de la matrice  $A$  sont positives, i.e.  $a_{ij} \in \mathbb{R}_+ \forall i, j$ .

$A > 0$  signifie que toutes les entrées de la matrice  $A$  sont strictement positives, i.e.  $a_{ij} \in \mathbb{R}_{0,+} \forall i, j$ .

$A \geq B$  signifie que chaque composante de la matrice  $A$  est plus grande ou égale à la composante correspondante de la matrice  $B$ , i.e.  $A - B \geq 0$ .

$A > B$  signifie que chaque composante de la matrice  $A$  est strictement plus grande que la composante correspondante de la matrice  $B$ , i.e.  $A - B > 0$ .

$|A|$  désigne la matrice  $A$  dont chaque élément est pris en valeur absolue.

$\text{int}(X)$  désigne l'intérieur de l'ensemble  $X$ .

$\dot{x}$  désigne la dérivée de la variable  $x$  par rapport au temps  $t$ .

# Introduction

Dans ce mémoire, nous étudions la stabilisabilité de systèmes linéaires temps-invariants positifs via une approche particulière faisant intervenir des polytopes et les ensembles de sommets qui leur sont propres. Les systèmes positifs sont d'une grande importance en pratique puisque la propriété de positivité apparaît dans de nombreuses applications numériques ([9]) ou dans la nature elle-même (en chimie, en physique, en biologie, etc). Ce travail sera divisé en deux parties principales, l'une concernant une approche théorique à la stabilisabilité positive de ces systèmes et se basant essentiellement sur le papier de Bartek Roszak et Edward J. Davison [9], l'autre traitant un cas particulier de système positif - à savoir les modèles de réacteur tubulaire, dits à écoulement piston et à dispersion axiale. Dans cette seconde partie, nous partons du système décrit dans le papier de Joseph Winikin, Denis Dochain et Philippe Ligarius [11] que nous allons manipuler et analyser dans le but d'en comprendre le comportement et d'y appliquer la théorie de la stabilisation positive développée dans la première partie ; toute cette étude a été réalisée dans le cadre de ce mémoire et les résultats obtenus sont donc propres à ce travail.

Dans la première partie, qui couvre les trois premiers chapitres, nous fournissons des conditions nécessaires et suffisantes pour la stabilisabilité de systèmes LTI (linéaires temps-invariants) positifs. Nous débuterons notre analyse en fixant le cadre de travail général et en introduisant quelques définitions et résultats qui nous seront d'une grande utilité par la suite. Nous étudierons ensuite les systèmes positifs à une seule entrée et une seule sortie, pour lesquels nous fournirons plusieurs résultats importants en terme de stabilisabilité, dont l'un d'eux - notamment - permettra de tester la stabilisabilité positive d'un système et de fournir une matrice de gain si le test est concluant, en se basant uniquement sur les éléments des matrices  $A$  et  $b$  décrivant le système. Finalement, nous généraliserons ces résultats aux systèmes positifs à plusieurs entrées et plusieurs sorties, et nous en développerons de nouveaux (en particulier ceux concernant les polytopes et leurs ensembles de sommets). Nous serons alors apte à fournir un algorithme général permettant de tester la stabilisabilité positive de tout système LTI positif et, le cas échéant, de fournir une matrice de gain stabilisant positivement le système. Notons éga-

lement que, si notre étude concerne essentiellement l'asservissement d'état, nous nous pencherons aussi brièvement sur la stabilisation d'état estimé.

Dans la seconde partie, constituée du quatrième et dernier chapitre, nous appliquerons la théorie des chapitres précédents à un type de système positif particulier : les modèles de réacteur tubulaire. Nous modéliserons tout d'abord le système au moyen d'équations aux dérivées partielles (équations de conservation des masses et conditions aux limites), après quoi viendra la phase de discrétisation spatiale grâce à laquelle nous obtiendrons un modèle en dimension finie. Ce processus de discrétisation sera réalisé via la méthode des différences finies. Nous pourrons ainsi exprimer la dynamique de notre système au moyen d'une équation différentielle matricielle. A partir de là, nous fournirons une brève approche analytique du problème avant d'étudier plus en détail - de manière numérique cette fois - notre système discrétisé, via divers graphes et algorithmes de calculs réalisés grâce au logiciel MATLAB. Plus précisément, nous comparerons les comportements du système de base et du système contrôlé en étudiant leurs trajectoires d'état, et déstabiliserons volontairement notre système de base en perturbant sa matrice  $A$  afin de pouvoir appliquer notre algorithme sur un système instable.

# Chapitre 1

## Préambule

Les résultats et les preuves présentés dans les trois premiers chapitres sont inspirés principalement de [9].

### 1.1 Cadre de travail et définitions préliminaires

Dans un premier temps, nous introduisons les quelques définitions suivantes, dont nous aurons l'usage par la suite :

- Une matrice positive  $A$  est une matrice dont tous les éléments sont plus grands ou égaux à zéro, i.e.  $a_{ij} \in \mathbb{R}_+ \forall i, j$ .
- Une matrice de Metzler  $A$  est une matrice dont tous les éléments non diagonaux sont positifs, i.e.  $a_{ij} \in \mathbb{R}_+ \forall i \neq j$ .
- Un polytope  $P$  est l'enveloppe convexe d'un ensemble de points  $V := \{v_1, \dots, v_r\}$ , i.e. le plus petit ensemble convexe contenant ces points.
- On dit d'une matrice  $A$  qu'elle possède des lignes unitaires si et seulement si chaque ligne de  $A$  admet au plus un élément non nul.
- On dit d'une matrice  $A$  qu'elle possède des colonnes unitaires si et seulement si chaque colonne de  $A$  admet au plus un élément non nul.
- Soit une matrice  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Un sous-espace vectoriel  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  est  $A$ -invariant si et seulement si  $A[S] \subseteq S$ , i.e.  $\forall v \in S, Av \in S$ .

Soit un système dynamique  $R = [A, B, C, D]$  décrit par les équations

$$\begin{cases} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du, \end{cases} \quad (1.1)$$

où  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{r \times n}$  et  $D \in \mathbb{R}^{r \times m}$ .

Nous savons que sa trajectoire d'état est définie par

$$\begin{aligned} x(t) &= \phi(t, 0, x_0, u(\cdot)) \\ &= e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau, \end{aligned}$$

où  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  et  $u(\cdot) \in \mathcal{U} = \{u : I = \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^m, u(\cdot) \text{ continue par morceaux}\}$ .

De même, la réponse du système est donnée par

$$\begin{aligned} y(t) &= r(t, x(t), u(t)) \\ &= \underbrace{\rho(t, 0, x_0, 0)}_{:=\rho_1} + \underbrace{\rho(t, 0, 0, u(\cdot))}_{:=\rho_2} \\ &= Ce^{At}x_0 + \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t), \end{aligned}$$

où  $\rho_1$  est la réponse à l'entrée nulle, et  $\rho_2$  est la réponse à l'état nul.

## 1.2 Positivité d'un système

Définissons tout d'abord la notion de "positivité d'un système" :

**Définition 1.1.** *Un système linéaire  $R = [A, B, C, D]$  est dit positif si et seulement si pour tout état initial positif  $x_0$  et pour toute entrée positive  $u$ , l'état du système  $x$  et la sortie  $y$  restent positifs, i.e.*

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}_+^n, \forall u(\cdot) \in \mathcal{U}_+ = \{u(\cdot) \in \mathcal{U} : \forall t \in I = \mathbb{R}_+, u(t) \geq 0\}, \forall t \geq 0,$$

$$x(t) \in \mathbb{R}_+^n \quad \text{et} \quad y(t) \in \mathbb{R}_+^m.$$

Il est possible de fournir une condition nécessaire et suffisante pour la positivité d'un système linéaire, uniquement en fonction des matrices du système  $A, B, C$  et  $D$ . Introduisons tout d'abord trois lemmes successifs - provenant de [2] - que nous énonçons et démontrons ci-dessous.

**Lemme 1.1.** *Pour que le système dynamique  $R = [A, 0, 0, 0] = [A]$  soit positif, il est nécessaire que*

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}_+^n, \forall i \in \underline{n}, \forall t \geq 0 \text{ tel que } x_i(t) = 0, \dot{x}_i(t) \geq 0,$$

où  $x(t) = (x_i(t))_{i \in \underline{n}} = e^{At}x_0$ .

*Démonstration.* Supposons par l'absurde que pour un certain  $x_0 \in \mathbb{R}_+^n$ ,  $\exists i \in \underline{n}$ ,  $\exists t \geq 0$  tels que

$$x_i(t) = 0 \text{ et } \dot{x}_i(t) < 0.$$

Par hypothèse, la solution de l'équation différentielle  $\dot{x}(t) = Ax(t)$  avec condition initiale  $x(0) = x_0$ , donnée par  $x(t) = e^{At}x_0$ , est positive  $\forall t \geq 0$ , et en particulier

$$x_i(t) \geq 0 \quad \forall t \geq 0.$$

De plus, nous pouvons écrire

$$\dot{x}(t) = Ae^{At}x_0 = e^{At}Ax_0, \quad \forall t \geq 0.$$

Dès lors, la fonction  $\dot{x}_i(\cdot)$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$  et donc

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) < 0 &\Rightarrow \exists T > 0 \text{ tel que } \forall \tau \in [t, t+T], \dot{x}_i(\tau) < 0 \\ &\Rightarrow \exists T > 0 \text{ tel que } x_i(\cdot) \text{ est strictement décroissante sur } [t, t+T] \\ &\Rightarrow \text{comme } x_i(t) = 0, \quad x_i(\tau) < 0 \quad \forall \tau \in [t, t+T]. \end{aligned}$$

Cela est en contradiction avec l'hypothèse de positivité du système  $R = [A]$ .  $\square$

**Lemme 1.2.** *Soit une matrice  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Si toutes les entrées hors-diagonales de la matrice  $A$  sont positives, i.e.*

$$a_{ij} > 0 \quad \forall i, j \in \underline{n} \text{ tels que } i \neq j,$$

*alors le système dynamique  $R = [A]$  est un système positif.*

*Démonstration.* Nous démontrons ce résultat en plusieurs étapes :

1. Pour un état initial  $x_0 \in \mathbb{R}_+^n$  tel que pour un certain  $i \in \underline{n}$ ,  $x_{0i} = 0$ , et tel que  $x_0 \neq 0$ , montrons qu'il existe un  $T > 0$  tel que  $x(t) \geq 0 \quad \forall t \in [0, T]$ .  
Nous savons que

$$\dot{x}(t) = \frac{d}{dt}(e^{At}x_0) = Ae^{At}x_0 = e^{At}Ax_0.$$

A l'instant  $t = 0$ , nous avons alors

$$\dot{x}(0) = Ax_0 = \left( \frac{d}{dt}(e^{At}x_0) \right) \Big|_{t=0}.$$

Puisque  $x_0 \neq 0$  et  $x_{0i} = 0$  pour un certain  $i \in \underline{n}$ , et puisque les entrées hors-diagonales de la matrice  $A$  sont positives par hypothèse, nous pouvons affirmer que

$$\dot{x}_i(0) = (Ax_0)_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij}x_{0j} > 0.$$

Par continuité, nous avons alors que

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(0) > 0 &\Rightarrow \exists T_i > 0 \text{ tel que } \forall \tau \in [0, T_i], \dot{x}_i(\tau) > 0 \\ &\Rightarrow \exists T_i > 0 \text{ tel que } x_i(\cdot) \text{ est strictement croissante sur } [0, T_i] \\ &\Rightarrow x_i(\tau) > 0 \quad \forall \tau \in [0, T_i]. \end{aligned}$$

Dès lors,  $\exists T > 0$  tel que  $x(t) \geq 0, \forall t \in [0, T]$ , où  $T = \min_{i \in \underline{n}} T_i$ .

2. Montrons maintenant qu'il existe un  $T > 0$  tel que,  $\forall t \in [0, T]$ ,  $x(t) \geq 0$ , et cette fois pour un état initial  $x_0 \in \mathbb{R}_+^n$  quelconque. Nous allons voir que nous pouvons toujours décomposer  $x_0$  de façon à avoir une composante nulle, c'est-à-dire, que nous pouvons toujours nous ramener à un  $x_0$  tel que  $x_{0i} = 0$ . Il nous suffira alors d'appliquer le point précédent pour obtenir la thèse.

Soit  $x_0 \in \mathbb{R}_+^n$ , nous pouvons décomposer  $x_0$  de la façon suivante :

$$x_0 = \begin{bmatrix} x_{01} \\ x_{02} \\ \vdots \\ x_{0n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{01} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ x_{02} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \dots + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ x_{0n} \end{bmatrix}.$$

Nous pouvons alors écrire  $x_0$  sous la forme

$$x_0 = \sum_{j=1}^n (\delta_{jk})_{k=1}^n x_{0j} \quad \text{avec } \delta_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = k \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En appliquant la première étape avec  $x_0$  de la forme ci-dessus, nous obtenons

$$\exists T > 0 \text{ tel que } x(t) = e^{At}x_0 = \sum_{j=1}^n (\delta_{jk})_{k=1}^n e^{At}x_{0j} \geq 0 \quad \forall t \in [0, T].$$

Ces deux premières étapes nous montrent que

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}_+^n, \exists T > 0 \text{ tel que } x(t) = e^{At}x_0 \geq 0 \quad \forall t \in [0, T]. \quad (1.2)$$

Cela signifie que pour tout état initial  $x_0$  positif, le vecteur d'état  $x(t)$  reste positif sur l'intervalle  $[0, T]$ .

3. Nous déduisons des deux premières étapes que,  $\forall x_0 \in \mathbb{R}_+^n, \forall \tau \geq 0$ ,

$$x(\tau) \in \mathbb{R}_+^n \Rightarrow \exists T > 0 \text{ tel que } \forall t \in [\tau, \tau + T], \quad x(t) = e^{At}x_0 \geq 0. \quad (1.3)$$

En effet, nous pouvons écrire

$$x(t) = e^{At}x_0 = e^{At}e^{-A\tau}e^{A\tau}x_0 = e^{A(t-\tau)}x(\tau).$$

Par (1.2), nous en concluons que

$$\exists T > 0 \text{ tel que } x(t) = e^{A(t-\tau)}x(\tau) \geq 0 \quad \forall t \in [\tau, \tau + T].$$

4. Par conséquent,  $\forall x_0 \in \mathbb{R}_+^n, \forall t \geq 0, x(t) = e^{At}x_0 \geq 0$ . En effet, supposons par l'absurde que

$$\begin{aligned} & \exists x_0 \in \mathbb{R}_+^n, \exists t \geq 0 \text{ tels que } x(t) = e^{At}x_0 \not\geq 0 \\ \Leftrightarrow & \exists x_0 \in \mathbb{R}_+^n, \exists t \geq 0, \exists i \in \underline{n} \text{ tels que } x_i(t) < 0 \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow & \exists x_0 \in \mathbb{R}_+^n, \exists \tau \geq 0 \ (\tau \in [0, t]), \exists i \in \underline{n} \text{ tels que } x_i(\tau) = 0, \\ & x_j(\tau) \geq 0 \quad \forall j \neq i, \text{ et } x_i(\sigma) < 0 \quad \forall \sigma \in ]\tau, t]. \end{aligned} \quad (1.5)$$

De fait, par (1.4),  $x_i(t) < 0$ . Dès lors, à un instant que l'on note  $\tau$ ,  $x_i(\tau)$  va s'annuler puisque l'on part d'un  $x_0 \in \mathbb{R}_+^n$  (i.e.  $x_{0i} \geq 0$ ) et puisque  $x_i(\cdot)$  est une fonction continue sur  $[0, t]$  (théorème de la valeur intermédiaire). Qui plus est, (1.5) est équivalent à

$$\begin{aligned} & \exists x_0 \in \mathbb{R}_+^n, \exists \tau \geq 0 \text{ tels que } x(\tau) \in \mathbb{R}_+^n, \text{ et, pour un certain } i \in \underline{n}, \\ & x_i(\tau) = 0 \text{ et } x_i(\sigma) < 0 \quad \forall \sigma \in ]\tau, t]. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Or, par (1.3),  $x(\tau) \in \mathbb{R}_+^n$  entraîne que

$$\exists T > 0 \text{ tel que } x_i(\sigma) \geq 0 \quad \forall \sigma \in [\tau, \tau + T],$$

ce qui est en contradiction avec (1.6).

□



**Lemme 1.3.** *Le système dynamique  $R = [A]$  est positif si et seulement si la matrice  $A$  est une matrice de Metzler.*

*Démonstration.* La condition est nécessaire :

Montrons que toutes les entrées hors-diagonales de la matrice  $A$  sont positives. Par le lemme 1.1,  $\forall x_0 \in \mathbb{R}_+^n$ ,  $\forall i \in \underline{n}$ ,  $\forall t \geq 0$ ,

$$x_i(t) = 0 \Rightarrow \dot{x}_i(t) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij} x_j(t) \geq 0.$$

Par conséquent,  $\forall i \in \underline{n}$  (en  $t = 0$ ) avec

$$\begin{aligned} x_0 &= (\delta_{jk})_{k=1}^n \in \mathbb{R}_+^n \\ &= \begin{cases} 1 & \text{si } j = k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad j \neq i \end{aligned}$$

tel que  $x_i(0) = x_{0i} = 0$ , nous avons

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij} x_{0j} \geq 0.$$

Dès lors,  $a_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j \in \underline{n}$  tels que  $i \neq j$ .

La condition est suffisante :

Définissons la matrice  $A_\epsilon = [a_{ij} + \epsilon]_{i,j=1}^n$  avec  $\epsilon > 0$  arbitraire. Par hypothèse, la matrice  $A$  est une matrice de Metzler. Par conséquent, les entrées de la matrice  $A_\epsilon$  sont telles que

$$a_{ij} + \epsilon > 0 \quad \forall i, j \in \underline{n} \text{ tels que } i \neq j.$$

Dès lors, par le lemme 1.2,

$$e^{(a_{ij} + \epsilon)_{i,j=1}^n t} \mathbb{R}_+^n = e^{A_\epsilon t} \mathbb{R}_+^n \subset \mathbb{R}_+^n.$$

Autrement dit,  $\forall t \geq 0$ ,  $\forall x_0 \in \mathbb{R}_+^n$ ,  $x_\epsilon(t) = e^{A_\epsilon t} x_0 \in \mathbb{R}_+^n$ , i.e.  $(x_\epsilon)_i(t) \geq 0 \quad \forall i \in \underline{n}$ . En faisant tendre  $\epsilon$  vers 0, nous avons (par la théorème de dépendance continue de la solution d'une équation différentielle par rapport à un paramètre) que

$$x_i(t) = \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ \epsilon > 0}} (x_\epsilon)_i(t) \geq 0 \quad \forall i \in \underline{n}.$$

□

Nous pouvons maintenant énoncer et démontrer le résultat suivant :

**Théorème 1.1.** *Un système linéaire  $R = [A, B, C, D]$  est positif si et seulement si  $A$  est une matrice de Metzler, et  $B$ ,  $C$  et  $D$  sont des matrices positives.*

*Démonstration.* La condition est nécessaire :

Considérons deux cas :

1. Cas particulier :  $B = 0 \in \mathbb{R}^{n \times m}$  et  $D = 0 \in \mathbb{R}^{r \times m}$ .

Montrons que si le système dynamique  $R = [A, 0, C, 0]$  décrit par les équations

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{cases}$$

avec la condition initiale  $x(0) = x_0$  et  $t \geq 0$  est un système dynamique positif alors la matrice  $A$  est une matrice de Metzler et la matrice  $C$  est une matrice positive.

Par le lemme 1.3, nous savons que si un système dynamique  $R = [A]$  est positif alors la matrice  $A$  est une matrice de Metzler. Il reste donc à vérifier que la matrice  $C$  est une matrice positive, i.e.  $C \in \mathbb{R}_+^{r \times n}$ , ou encore,

$$c_{ij} \geq 0 \quad \forall i \in \underline{r}, \forall j \in \underline{n}.$$

Soit  $x_0 \in \mathbb{R}_+^n$ . Par hypothèse,  $\forall t \geq 0$ ,

$$x(t) = e^{At}x_0 \in \mathbb{R}_+^n$$

et

$$y(t) = Cx(t) = Ce^{At}x_0 \in \mathbb{R}_+^r.$$

Choisissons comme condition initiale  $x_0 = e_i$ , avec  $e_i$  le  $i^{\text{e}}$  vecteur de la base canonique de  $\mathbb{R}_+^n$ . Nous avons alors

$$\begin{aligned} Y(t) &\stackrel{\text{def}}{=} [y^{(1)}(t) \dots y^{(n)}(t)] \in \mathbb{R}_+^{r \times n} \quad \text{où } y^{(i)}(t) = Ce^{At}e_i \in \mathbb{R}_+^r \\ &= [Ce^{At}e_1 \dots Ce^{At}e_n] \\ &= Ce^{At}[e_1 \dots e_n] \\ &= Ce^{At}. \end{aligned}$$

Dès lors, puisque  $e^{At}$  est une matrice inversible, nous pouvons écrire

$$C = Y(t)e^{-At}$$

et donc, en  $t = 0$ ,  $C = Y(0) \in \mathbb{R}_+^{r \times n}$ . Par conséquent,  $C \in \mathbb{R}_+^{r \times n}$ .

2. Cas général :  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{r \times n}$  et  $D \in \mathbb{R}^{r \times m}$ .

Nous souhaitons donc montrer que si le système dynamique  $R = [A, B, C, D]$  est positif alors  $A$  est une matrice de Metzler et  $B$ ,  $C$  et  $D$  sont des matrices positives. Il est évident que si  $R = [A, B, C, D]$  est un système dynamique positif alors  $R = [A, 0, C, 0]$  est également un système positif. Or, nous avons prouvé au point précédent que si le système dynamique  $R = [A, 0, C, 0]$  est positif alors la matrice  $A$  est une matrice de Metzler et la matrice  $C$  est une matrice positive. Il reste donc à vérifier que les matrices  $B$  et  $D$  sont des matrices positives.

(a) Montrons que  $B \in \mathbb{R}_+^{n \times m}$ , c'est-à-dire

$$b_{ij} \geq 0 \quad \forall i \in \underline{n}, \forall j \in \underline{m}.$$

Soit  $x_0 \in \mathbb{R}_+^n$ . Nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \quad \forall t \geq 0 \\ \Leftrightarrow \quad \forall i \in \underline{n} \quad \forall t \geq 0 \quad \dot{x}_i(t) &= \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j(t) + \sum_{l=1}^m b_{il}u_l(t). \end{aligned}$$

Par le lemme 1.1,  $\forall j \in \underline{n}$ ,  $\forall t \geq 0$  tels que  $x_j(t) = 0$ ,

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{l=1}^m b_{il}u_l(t) \geq 0 \quad \forall i \in \underline{n}.$$

Nous voulons montrer que toutes les entrées de la matrice  $B$  sont positives. Supposons qu'il en existe une négative, par exemple,  $b_{il}$ . Dès lors,  $\forall i \in \underline{n}$ , en  $t = 0$ , avec (s.p.d.g.)  $x_0 = 0$  et  $u_l(0) = (0, \dots, 0, k, 0, \dots, 0)$ ,

$$\dot{x}_{0i} = \dot{x}_i(0) = \sum_{l=1}^m b_{il}u_l(0) = b_{il}k < 0.$$

Ce résultat contredit l'hypothèse de positivité du système dynamique  $R = [A, B, C, D]$ .

(b) Montrons maintenant que  $D \in \mathbb{R}_+^{r \times m}$ , c'est-à-dire

$$d_{ij} \geq 0 \quad \forall i \in \underline{r}, \forall j \in \underline{m}.$$

Soit  $x_0 \in \mathbb{R}_+^n$ . Le système dynamique  $R = [A, B, C, D]$  est décrit notamment par l'équation

$$y(t) = Cx(t) + Du(t).$$

Si le vecteur d'état  $x(t)$  est nul alors nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} y(t) &= Du(t) \geq 0 \quad \forall t \geq 0 \\ \Leftrightarrow \quad \forall i \in \underline{r} \quad \forall t \geq 0 \quad y_i(t) &= \sum_{j=1}^m d_{ij} u_j(t) \geq 0. \end{aligned}$$

Suivons le même raisonnement que précédemment, c'est-à-dire, supposons qu'il existe une entrée de la matrice  $D$  qui soit négative. Dès lors,  $\forall i \in \underline{r}$ , en  $t = 0$ , avec  $u_j(0) = (0, \dots, 0, q, 0, \dots, 0)$ ,

$$y_{0i} = y_i(0) = \sum_{j=1}^m d_{ij} u_j(0) = d_{ij} q < 0,$$

ce qui contredit à nouveau l'hypothèse de positivité du système dynamique  $R = [A, B, C, D]$ .

La condition est suffisante :

Montrons que si la matrice  $A$  est une matrice de Metzler et si les matrices  $B$ ,  $C$  et  $D$  sont des matrices positives alors le système dynamique  $R = [A, B, C, D]$  est positif, c'est-à-dire

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}_+^n, \forall u \in \mathcal{U}_+, x(t) \in \mathbb{R}_+^n \text{ et } y(t) \in \mathbb{R}_+^r \quad \forall t \geq 0.$$

- (a) Montrons que le vecteur d'état  $x(t)$  est positif. Soit  $t \geq 0$ , nous savons que la solution de l'équation différentielle

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

avec comme condition initiale  $x(0) = x_0$  est donnée par

$$x(t) = e^{At} x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau.$$

Nous avons par hypothèse que  $A$  est une matrice de Metzler, d'où, par la caractérisation géométrique de la positivité de  $R = [A]$ , nous pouvons affirmer la  $e^{At}$ -invariance de  $\mathbb{R}_+^n$ .

De ce fait, avec  $x_0 \in \mathbb{R}_+^n$ ,  $e^{At} x_0 \in \mathbb{R}_+^n$ ,  $u(\cdot) \in \mathcal{U}_{\mathbb{R}_+^m}$  et  $B$  une matrice positive, nous avons que  $e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) \in \mathbb{R}_+^n$ . Par conséquent,  $x(t) \in \mathbb{R}_+^n$ .

- (b) Montrons maintenant que la sortie du système dynamique  $R = [A, B, C, D]$  est positive. Soit  $t \geq 0$ , nous pouvons écrire

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

$$\Leftrightarrow \forall i \in \underline{r} \quad y_i(t) = \sum_{j=1}^n c_{ij}x_j(t) + \sum_{l=1}^m d_{il}u_l(t).$$

Si l'entrée du système est positive, c'est-à-dire que

$$\forall l \in \underline{m} \quad u_l(t) \geq 0,$$

et comme le vecteur d'état est positif (par (a)), alors

$$y_i(t) \geq 0 \quad \forall i \in \underline{r}.$$

□

### 1.3 Stabilité et stabilisabilité d'un système

Nous nous intéressons maintenant à la stabilisabilité de systèmes du type (1.1) LTI (linéaires temps-invariants) positifs.

**Définition 1.2.** *Un système LTI est (exponentiellement) stable si et seulement si  $\exists M > 0$  et  $\exists \sigma > 0$  tels que*

$$\forall t \geq 0, \quad \|e^{At}\| \leq Me^{-\sigma t},$$

*ou encore, si et seulement si toutes les valeurs propres de  $A$  sont à partie réelle strictement négative, i.e.  $\sigma(A) \subset \text{int}(\mathcal{C}_-)$ . On dira alors que  $A$  est une "matrice stable".*

**Définition 1.3.** *Un système LTI positif  $R = [A, B, C, D]$  est positivement (exponentiellement) stabilisable si et seulement si il existe une matrice  $K_s \in \mathbb{R}^{m \times n}$  telle que  $A - BK_s$  soit une matrice de Metzler stable.*

Dans les chapitres 2 et 3, nous supposerons que  $D = 0$ . De plus, "stable" et "stabilisable" feront référence à la stabilité exponentielle positive et, de manière similaire, "instable" et "non stabilisable" feront référence à l'instabilité exponentielle positive.

Notons au passage que, quelle que soit l'entrée du système (positive ou négative), les définitions précédentes ainsi que le théorème 1.1 assurent la positivité de la trajectoire d'état pour toute condition initiale  $x_0 \in \mathbb{R}_+^n$ . Il est aussi important de signaler que dans les systèmes réels (et dans les applications numériques), la positivité de l'état est un phénomène courant ; cependant, la condition de positivité de l'entrée, comme il était question dans la définition initiale (1.1), n'est pas toujours nécessaire. Une telle restriction annihilerait même la possibilité de stabilisation, aussi ne nous limiterons-nous pas aux entrées positives.

## Chapitre 2

# Etude des systèmes positifs SISO

Dans ce chapitre, nous traiterons de résultats propres à la stabilisation de systèmes positifs SISO (*single-input single-output*, i.e. une seule entrée et une seule sortie). Nous supposons que  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est une matrice de Metzler,  $b \in \mathbb{R}_+^n$  est de rang plein, et  $c \in \mathbb{R}_+^{1 \times n}$  est de rang plein. De plus, nous supposons que la condition initiale du système est positive, i.e.  $x_0 \in \mathbb{R}_+^n$ .

### 2.1 Conditions nécessaires et suffisantes pour la stabilisabilité de systèmes LTI positifs SISO

Une première remarque que nous pouvons faire est que, pour une matrice de Metzler instable  $A$ , il n'existe pas de  $k_s \in \mathbb{R}_-^{1 \times n}$  qui ferait de  $A - bk_s$  une matrice de Metzler stable. Pour clarifier cette affirmation, une première étape serait d'introduire les lemmes et théorèmes suivants, provenant de [7] ainsi que de [4] :

**Lemme 2.1.** *Soit  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Si  $A$  est une matrice positive et  $\sum_{j=1}^n a_{ij} > 0$  pour tout  $i \in \underline{n}$ , alors  $\rho(A) > 0$ , où  $\rho(A)$  est le rayon spectral de la matrice  $A$ .*

**Lemme 2.2.** *Soit  $A \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$ . Pour tout  $x \in \mathcal{C}_{0,+}^n$ , nous avons que*

$$\min_{i \in \underline{n}} \frac{1}{x_i} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq \rho(A) \leq \max_{i \in \underline{n}} \frac{1}{x_i} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j$$

et

$$\min_{j \in \underline{n}} x_j \sum_{i=1}^n \frac{a_{ij}}{x_i} \leq \rho(A) \leq \max_{j \in \underline{n}} x_j \sum_{i=1}^n \frac{a_{ij}}{x_i}.$$

**Remarque 2.1.** *Les preuves de ces lemmes ont été omises car jugées non nécessaires à la complétude de ce mémoire.*

**Lemme 2.3.** *Soient  $A \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$  et  $x \in \mathbb{R}_{0,+}^n$ . Si  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$  sont des réels positifs tels que  $\alpha x \leq Ax \leq \beta x$ , alors  $\alpha \leq \rho(A) \leq \beta$ . De plus, si  $\alpha x < Ax$ , alors  $\alpha < \rho(A)$ ; si  $Ax < \beta x$ , alors  $\rho(A) < \beta$ .*

*Démonstration.* Si  $\alpha x \leq Ax$ , alors

$$\alpha \leq \min_{i \in \underline{n}} \frac{1}{x_i} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j,$$

et par le lemme 2.2, nous en déduisons que  $\alpha \leq \rho(A)$ . Si  $\alpha x < Ax$ , alors il existe un  $\tilde{\alpha} > \alpha$  tel que  $\tilde{\alpha} x \leq Ax$ . Dans ce cas, nous avons que  $\rho(A) \geq \tilde{\alpha} > \alpha$  et donc  $\rho(A) > \alpha$ . Le même raisonnement peut être appliqué pour les bornes supérieures.  $\square$

**Lemme 2.4.** *Soit  $A \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$ . Si  $A$  possède un vecteur propre strictement positif, alors la valeur propre correspondante est le rayon spectral; i.e. si  $Ax = \lambda x$ ,  $A \geq 0$  et  $x > 0$ , alors  $\lambda = \rho(A)$ .*

*Démonstration.* Si  $x > 0$  et  $Ax = \lambda x$ , alors  $\lambda \geq 0$  et  $\lambda x \leq Ax \leq \lambda x$ . Par le lemme 2.3, nous avons alors que  $\lambda \leq \rho(A) \leq \lambda$ .  $\square$

**Lemme 2.5.** *Soient  $A \in \mathbb{R}_{0,+}^{n \times n}$  et  $x \in \mathcal{T}^n$ . Supposons que  $Ax = \lambda x$ ,  $x \neq 0$  et  $|\lambda| = \rho(A)$ . Alors  $A|x| = \rho(A)|x|$  et  $|x| > 0$ .*

*Démonstration.* Nous obtenons aisément que

$$\rho(A)|x| = |\lambda||x| = |\lambda x| = |Ax| \leq |A||x| = A|x|$$

et de ce fait,  $y \stackrel{\text{def}}{=} A|x| - \rho(A)|x| \geq 0$ . Nous savons que si  $A > 0$ ,  $x \geq 0$  et  $x \neq 0$ , alors  $Ax > 0$ ; or, nous savons que  $|x| \geq 0$  et  $|x| \neq 0$ , nous en déduisons donc que  $A|x| > 0$ . Le lemme 2.1 garantit également que  $\rho(A) > 0$ , donc si  $y = 0$ , nous avons que  $A|x| = \rho(A)|x|$  et  $|x| = \rho(A)^{-1}A|x| > 0$ . Si  $y \neq 0$ , nous posons  $z \stackrel{\text{def}}{=} A|x| > 0$  et nous obtenons alors que

$$0 < Ay = Az - \rho(A)z$$

et donc,  $Az > \rho(A)z$ . Par le lemme 2.3, nous avons la contradiction  $\rho(A) > \rho(A)$  et nous en déduisons que  $y = 0$ .  $\square$



**Lemme 2.6.** Soit  $A \in \mathbb{R}_{0,+}^{n \times n}$  ; le rayon spectral  $\rho(A)$  est une valeur propre de  $A$ ,  $\rho(A) > 0$  et il existe un vecteur positif  $x$  tel que  $Ax = \rho(A)x$ .

*Démonstration.* Il existe une valeur propre  $\lambda$  telle que  $|\lambda| = \rho(A) > 0$  et un vecteur propre associé non nul. Par le lemme 2.5, ce vecteur propre est  $|x|$ .  $\square$

**Lemme 2.7.** Soient  $A \in \mathbb{R}_{0,+}^{n \times n}$  et  $x \in \mathcal{C}^n$ . Supposons que  $Ax = \lambda x$ ,  $x \neq 0$  et  $|\lambda| = \rho(A)$ . Alors il existe  $\theta \in \mathbb{R}$  tel que  $e^{-i\theta}x = |x| > 0$ .

*Démonstration.* Les hypothèses garantissent que  $|Ax| = |\lambda x| = \rho(A)|x|$ , et par le lemme 2.5 nous savons que  $A|x| = \rho(A)|x|$  et  $|x| > 0$ . En combinant ces deux égalités et l'inégalité triangulaire, nous obtenons que, pour tout  $k = 1, \dots, n$ ,

$$\begin{aligned} \rho(A)|x_k| &= |\lambda||x_k| = |\lambda x_k| = \left| \sum_{p=1}^n a_{kp}x_p \right| \\ &\leq \sum_{p=1}^n |a_{kp}||x_p| = \sum_{p=1}^n a_{kp}|x_p| = \rho(A)|x_k| \end{aligned}$$

et il y a donc égalité entre les deux termes de l'inégalité triangulaire. De ce fait, les nombres complexes (non nuls puisque  $A > 0$  et  $x \neq 0$ )  $a_{kp}x_p$ ,  $p = 1, \dots, n$ , doivent tous se trouver sur la même demi-droite (partant de l'origine) du plan complexe. En notant  $\theta$  leur argument commun, nous avons que

$$e^{-i\theta}a_{kp}x_p > 0$$

pour tout  $p = 1, \dots, n$ . Or, nous savons par hypothèse que tous les  $a_{kp}$  sont des réels strictement positifs. Nous avons donc bien que  $e^{-i\theta}x > 0$ .  $\square$

**Lemme 2.8.** Soit  $A \in \mathbb{R}_{0,+}^{n \times n}$  ; l'inégalité  $|\lambda| < \rho(A)$  tient pour toute valeur propre  $\lambda \neq \rho(A)$ .

*Démonstration.* Par définition,  $|\lambda| \leq \rho(A)$  pour toute valeur propre  $\lambda$  de  $A$ . Supposons que  $|\lambda| = \rho(A)$  et que  $Ax = \lambda x$ ,  $x \neq 0$ . Par le lemme 2.7,

$$w \stackrel{\text{def}}{=} e^{-i\theta}x > 0$$

pour un certain  $\theta \in \mathbb{R}$ , et donc  $Aw = \lambda w$ . Par le lemme 2.4, nous avons alors que  $\lambda = \rho(A)$ .  $\square$

**Lemme 2.9.** *Si  $A$  est une matrice de Metzler dont toutes les valeurs propres sont à partie réelle négative, alors  $-A^{-1}$  est une matrice positive.*

*Démonstration.* Soit  $k$  un réel positif tel que  $P = A + kI$  soit une matrice strictement positive. Notons  $\mu$  la plus grande valeur propre de  $P$  (qui est réelle, par les lemmes précédents). Comme  $\mu - k$  est une valeur propre de  $A$ , nous savons que  $\mu < k$ . De plus, nous savons que toute valeur propre de  $P$  a un module inférieur ou égal à  $\mu$  (strictement inférieur à  $\mu$  pour toute valeur propre différente de  $\mu$ , par le lemme 2.8). La norme de  $P$  est donc strictement inférieure à  $k$ , et nous en déduisons que

$$(-A)^{-1} = \frac{1}{k} \left( I - \frac{1}{k} P \right)^{-1} = \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{k^i} P^i.$$

□

Nous pouvons maintenant énoncer et démontrer le résultat suivant (la démonstration provient de [5]) :

**Lemme 2.10.** *Une matrice de Metzler  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est stable si et seulement si*

$$\exists d \in \text{int}(\mathbb{R}_+^n) \text{ tel que } -Ad \in \text{int}(\mathbb{R}_+^n). \quad (2.1)$$

*De plus, si  $A$  est stable, alors toute sous-matrice principale de  $A$  est stable.*

*Démonstration.* Vérifions dans un premier temps l'exactitude de l'équivalence.

La condition est suffisante :

Supposons qu'il existe  $d \in \text{int}(\mathbb{R}_+^n)$  tel que  $-Ad \in \text{int}(\mathbb{R}_+^n)$ , et considérons le candidat de Lyapunov

$$V(x) = d^T x,$$

où  $x \in \mathbb{R}_+^n$ . En calculant la dérivée de ce candidat de Lyapunov, nous obtenons

$$\dot{V}(x) = d^T A x < 0$$

pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^n \setminus \{0\}$ , et nous avons donc bien que  $A$  est une matrice stable.

La condition est nécessaire :

Supposons que  $A$  soit une matrice stable. Par le lemme 2.9, nous avons que  $-A^{-1}$  est une matrice positive. Ainsi, pour tout  $\tau \in \mathbb{R}_{0,+}^n$ , nous avons que

$$d \stackrel{\text{def}}{=} -A^{-1}\tau$$

est un vecteur positif qui satisfait bien  $-Ad \in \text{int}(\mathbb{R}_+^n)$ .

Maintenant que nous avons démontré l'équivalence, il nous reste à prouver que si  $A$  est stable, toute sous-matrice principale de  $A$  est stable. Ce résultat découle immédiatement de la première partie du lemme. En effet, soit  $\alpha \subset \underline{n}$  un ensemble d'indices compris entre 1 et  $n$ . Notons  $[A]^\alpha$  la matrice  $A$  dont les lignes et colonnes d'indices appartenant à  $\alpha$  ont été enlevées ; il s'agit donc bien d'une sous-matrice principale de  $A$ . Par hypothèse, nous savons que  $A$  est une matrice de Metzler stable, et donc

$$\exists d \in \text{int}(\mathbb{R}_+^n) \text{ tel que } -Ad \in \text{int}(\mathbb{R}_+^n).$$

En choisissant  $d_\alpha$ , le vecteur  $d$  dont les composantes d'indices appartenant à  $\alpha$  ont été enlevées, nous avons bien un vecteur de  $\text{int}(\mathbb{R}_+^n)$  tel que  $-[A]^\alpha d_\alpha \in \text{int}(\mathbb{R}_+^n)$ .  $\square$

Grâce à ce lemme, nous pouvons maintenant prouver que des matrices de gain négatives ne peuvent résoudre le problème de stabilisation.

**Lemme 2.11.** *Soit un système positif SISO  $R = [A, b, c, 0]$ , où  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $b \in \mathbb{R}_+^n$  et  $c \in \mathbb{R}_+^{1 \times n}$ . Si  $R$  est instable, il n'existe pas de matrice de gain négative telle que le système puisse être stabilisé, i.e.  $\nexists k_s \in \mathbb{R}_-^{1 \times n}$  tel que  $A - bk_s$  soit une matrice de Metzler stable.*

*Démonstration.* Pour démontrer ce lemme, nous montrons que pour toute matrice de Metzler instable  $A$  et pour toute matrice positive  $A^+ \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$ , la matrice  $A + A^+$  ne satisfait pas (2.1). Ainsi, par le lemme 2.10, si  $A + A^+$  est une matrice de Metzler stable, il existe  $d \in \text{int}(\mathbb{R}_+^n)$  tel que

$$\begin{aligned} 0 &< -d_1 a_{i1} - \dots - d_n a_{in} - d_1 a_{i1}^+ - \dots - d_n a_{in}^+ \\ &\leq -d_1 a_{i1} - \dots - d_n a_{in} \quad \forall i \in \underline{n}. \end{aligned}$$

Cependant, puisque  $A$  est instable, nous avons que pour tout  $d \in \text{int}(\mathbb{R}_+^n)$ , il existe un indice  $i$  pour lequel  $-d_1 a_{i1} - \dots - d_n a_{in} \leq 0$ , d'où une contradiction. De ce fait, puisque  $b \in \mathbb{R}_+^n$ , il ne peut exister de matrice de gain négative  $k_s \in \mathbb{R}_-^{1 \times n}$  telle que  $A - bk_s$  soit une matrice de Metzler stable.  $\square$

Introduisons également le résultat suivant, dont la preuve est fort similaire à celle du lemme 2.11 :

**Lemme 2.12.** *Supposons que  $\tilde{k}_s \in \mathbb{R}_+^{1 \times n}$  résolve le problème de stabilisation ; alors il existe aussi une matrice de gain positive stabilisante  $k_s \in \mathbb{R}_+^{1 \times n}$ .*

*Démonstration.* Prenons  $k_s$  égal à  $\tilde{k}_s$  avec tout  $\tilde{k}_s^i \in \mathbb{R}_-$  posé à zéro. Supposons maintenant qu'il n'existe pas de  $k_s \in \mathbb{R}_+^{1 \times n}$  stabilisant. De ce fait,  $A - bk_s$  n'est pas une matrice de Metzler stable et donc, par le lemme 2.10 :

$$\forall d \in \text{int}(\mathbb{R}_+^n), -(A - bk_s)d \notin \text{int}(\mathbb{R}_+^n). \quad (2.2)$$

Mais alors, puisque  $\tilde{k}_s$  résout le problème de stabilisation, nous obtenons, en utilisant successivement le lemme 2.10 et la condition de positivité de  $k_s$  :

$$\begin{aligned} 0 &< -d_1 a_{i1} - \dots - d_n a_{in} + d_1 (b\tilde{k}_s)_{i1} + \dots + d_n (b\tilde{k}_s)_{in} \\ &\leq -d_1 a_{i1} - \dots - d_n a_{in} + d_1 (bk_s)_{i1} + \dots + d_n (bk_s)_{in}. \end{aligned}$$

Or, par (2.2),  $-d_1 a_{i1} - \dots - d_n a_{in} + d_1 (bk_s)_{i1} + \dots + d_n (bk_s)_{in} \leq 0$ , pour un certain indice  $i$ , d'où, à nouveau, la contradiction  $0 < 0$ .  $\square$

**Remarque 2.2.** Le lemme 2.11 reste valable pour le cas des systèmes MIMO, avec la matrice de gain  $K_s$  ; cependant, le lemme 2.12 n'est lui correct que pour des systèmes SISO car remplacer les entrées négatives de la matrice de gain par des zéros pourrait détruire la propriété Metzler dans les systèmes à plusieurs entrées.

**Remarque 2.3.** Les lemmes 2.11 et 2.12 impliquent que, s'il existe une matrice de gain  $k_s$ , elle ne sera pas totalement négative (i.e.  $\exists i$  tel que  $k_s^i \notin \mathbb{R}_-$ ) ; de plus, le lemme 2.12 nous permet, pour le cas des systèmes SISO, de traiter directement les matrices de gain stabilisantes positives.

Le théorème suivant apporte de nouvelles observations :

**Théorème 2.1.** Soient  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  une matrice de Metzler et  $b \in \mathbb{R}_+^n$  une matrice positive et non nulle d'entrée ; définissons  $k_s = [k_s^1 \dots k_s^n] \in \mathbb{R}_+^{1 \times n}$  de la sorte : pour  $i, j \in \underline{n}$ , si  $b_j = 0, \forall j \neq i$ , alors

$$k_s^i > \frac{a_{ii}}{b_i},$$

sinon

$$k_s^i = \min_{j \neq i, b_j \neq 0} \left\{ \frac{a_{ji}}{b_j} \right\}.$$

Alors :

(a) il existe une matrice  $k \in \mathbb{R}^{1 \times n}$  telle que  $A - bk$  est une matrice de Metzler stable si et seulement si, avec  $k_s$  défini ci-dessus,  $A - bk_s$  est une matrice de Metzler stable ;

(b) de plus, si  $b_i \neq 0$  et  $b_j = 0, \forall j \neq i, j, i \in \underline{n}$ , alors il existe toujours une matrice positive  $k \in \mathbb{R}_+^{1 \times n}$  telle que  $A - bk$  est une matrice de Metzler stable si et seulement si la sous-matrice  $[A]^i$  est stable.

*Démonstration.* Nous prouvons successivement les points (a) et (b).

(a) La condition est nécessaire :

Montrons dans un premier temps que  $A - bk_s$  est une matrice de Metzler. Pour cela, prouvons que,  $\forall i \neq j$ ,

$$(A - bk_s)_{ij} = a_{ij} - b_i k_s^j \geq 0,$$

c'est-à-dire que,  $\forall i \neq j$ ,  $a_{ij} \geq b_i k_s^j$ . Deux cas sont alors envisageables :

1. Soit  $b_i = 0$  ; dans ce cas, la condition ci-dessus devient

$$a_{ij} \geq 0 \quad \forall i \neq j,$$

ce qui est toujours vrai puisque  $A$  est une matrice de Metzler.

2. Soit  $b_i \neq 0$  ; alors, par définition de  $k_s$ , nous savons que

$$k_s^j = \min_{i \neq j, b_i \neq 0} \left\{ \frac{a_{ij}}{b_i} \right\} \leq \frac{a_{ij}}{b_i} \quad \forall i \neq j$$

et donc

$$a_{ij} \geq b_i k_s^j \quad \forall i \neq j.$$

Prouvons maintenant que  $A - bk_s$  est une matrice stable. Par le lemme 2.10, il suffit de montrer qu'il existe  $d \in \text{int}(\mathbb{R}_+^n)$  tel que  $-(A - bk_s)d \in \text{int}(\mathbb{R}_+^n)$ . Puisque  $A$  est une matrice de Metzler stable, nous savons qu'il existe  $\tilde{d} \in \text{int}(\mathbb{R}_+^n)$  tel que  $-A\tilde{d} \in \text{int}(\mathbb{R}_+^n)$ . En reprenant ce  $\tilde{d}$ , nous avons que

$$-(A - bk_s)\tilde{d} = -A\tilde{d} + bk_s\tilde{d} \in \text{int}(\mathbb{R}_+^n)$$

car  $-A\tilde{d} \in \text{int}(\mathbb{R}_+^n)$ ,  $b \in \mathbb{R}_+^n$ ,  $k_s \in \mathbb{R}_+^{1 \times n}$  et  $\tilde{d} \in \text{int}(\mathbb{R}_+^n)$ .

La condition est suffisante :

Ce résultat est immédiat, en choisissant  $k = k_s$ .

(b) Supposons, sans perte de généralité, que  $b_1 \neq 0$ .

La condition est nécessaire :

S'il existe un  $k \in \mathbb{R}_+^{1 \times n}$  tel que  $A - bk$  est une matrice de Metzler stable, alors, puisque  $b_j = 0$ ,  $\forall j \neq 1$ , les sous-matrices  $[A - bk]^1$  et  $[A]^1$  sont identiques. Ainsi, par le lemme 2.10,  $[A]^1$  est forcément stable.

La condition est suffisante :

Puisque la sous-matrice  $[A]^1$  est stable, alors, par le lemme 2.10, il existe un vecteur  $d' = [d_2, \dots, d_n] \in \text{int}(\mathbb{R}_+^{n-1})$  tel que  $-[A]^1 d' \in \text{int}(\mathbb{R}_+^{n-1})$ . Autrement dit, pour un certain  $\delta_j > 0$ ,  $j \in \{2, \dots, n\}$ ,

$$-(a_{j2}d_2 + a_{j3}d_3 + \dots + a_{jn}d_n) > \delta_j.$$

Posons maintenant  $\delta = \min_{j=2, \dots, n} \{\delta_j\}$  et  $a = \max_{j=2, \dots, n} \{a_{j1}\}$ .

Si  $a = 0$ , posons  $d_1 = 1$ , sinon, choisissons  $d_1$  tel que  $0 < d_1 < \frac{\delta}{a}$ . Ainsi, (2.1) est satisfait pour toute ligne dont l'indice est dans  $\{2, \dots, n\}$ . Reste à traiter le cas de la première ligne. Remarquons qu'avec  $d = [d_1, \dots, d_n] \in \text{int}(\mathbb{R}_+^n)$ , nous avons

$$-(a_{11} - b_1 k_1)d_1 - (a_{12}d_2 + \dots + a_{1n}d_n) \geq b_1 k_1 d_1 - (|a_{11}| d_1 + a_{12}d_2 + \dots + a_{1n}d_n),$$

et puisque nous pouvons toujours choisir

$$\begin{aligned} k_1 &> \frac{|a_{11}| d_1 + a_{12}d_2 + \dots + a_{1n}d_n}{b_1 k_1} \\ &\geq 0, \end{aligned}$$

où la seconde inégalité provient de la positivité de  $b$ , de  $d$  et de  $k$ , ainsi que de la propriété Metzler de  $A$ , nous avons finalement

$$-(a_{11} - b_1 k_1)d_1 - (a_{12}d_2 + \dots + a_{1n}d_n) > 0.$$

Par le lemme 2.10, nous avons donc bien le résultat souhaité.  $\square$

## 2.2 Stabilisation de l'état estimé

Nous concluons ce chapitre en traitant brièvement de la stabilisation d'état estimé.

Dans le cas des systèmes LTI standards, le principe de séparation séquentielle est valable, i.e. il est possible de construire tout d'abord la matrice stabilisante  $k$ , ensuite notre matrice de gain de l'état estimé (injection de sortie)  $l$ , et finalement de combiner les deux pour obtenir un contrôle approprié. Nous voulons vérifier si cette propriété tient aussi pour les systèmes LTI positifs ; il est donc question de s'assurer qu'il n'y a violation d'aucune contrainte de positivité de l'état ou de la sortie du système.

En notant  $\hat{x}$  l'état estimé, nous avons

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + bu + l(y - \hat{y}),$$

où  $\hat{y} = c\hat{x}$ . Supposons maintenant que  $u = -k_s\hat{x}$ , avec  $k_s$  choisi de telle manière que  $A - bk_s$  soit une matrice de Metzler stable. Nous pouvons alors écrire

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ &= (A - bk_s)x + bk_s(x - \hat{x}),\end{aligned}$$

et donc si  $e_x \stackrel{def}{=} x - \hat{x} \geq 0$  (composante par composante), et  $k_s \geq 0$ , alors l'état restera constamment positif, i.e.  $x \in \mathbb{R}_+^n$  en tout temps. Notons bien que les lemmes 2.11 et 2.12, ainsi que le théorème 2.1, nous assurent l'existence d'une matrice de gain positive  $k_s$ , à partir du moment où le système est stabilisable.

Nous pouvons maintenant décrire la dynamique de l'erreur :

$$\begin{aligned}\dot{e}_x &= Ax + bu - A\hat{x} - b\hat{u} - l(y - \hat{y}) \\ &= Ax - A\hat{x} - ly + l\hat{y} \\ &= Ax - A\hat{x} - lcx + lc\hat{x} \\ &= (A - lc)(x - \hat{x}) \\ &= (A - lc)e_x.\end{aligned}$$

De ce fait, à partir du moment où  $A - lc$  est une matrice de Metzler stable,  $e_x$  restera constamment positif si sa condition initiale  $e_x(0)$  est positive. Or, nous savons que

$$e_x(0) = x(0) - \hat{x}(0)$$

et donc, puisque  $x(0)$  est toujours positif par hypothèse et puisque nous avons le contrôle sur  $\hat{x}(0)$ , nous pouvons forcer  $e_x(0)$  à être positif en posant  $\hat{x}(0) = 0$ . Le terme d'erreur  $e_x$  restera alors bien constamment positif.

Le principe de séparation séquentielle est donc valable pour les systèmes LTI positifs, sous l'hypothèse que la condition initiale de l'état estimé vaille zéro, i.e.  $\hat{x}_0 = 0$ .

# Chapitre 3

## Etude des systèmes positifs MIMO

Dans ce chapitre, nous traiterons de la stabilisation de systèmes positifs MIMO (*multiple-input multiple-output*, i.e. plusieurs entrées et plusieurs sorties). Nous supposons à nouveau que  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est une matrice de Metzler,  $B \in \mathbb{R}_+^{n \times m}$  est de rang plein, et  $C \in \mathbb{R}_+^{r \times n}$  est de rang plein. De même, nous supposons que la condition initiale du système est positive, i.e.  $x_0 \in \mathbb{R}_+^n$ .

### 3.1 Conditions nécessaires et suffisantes pour la stabilisabilité de systèmes LTI positifs MIMO

Rappelons tout d'abord que le lemme 2.11, cité et démontré dans la sous-section précédente traitant des systèmes positifs SISO, peut être étendu aux systèmes positifs MIMO. Plus précisément, si le système  $R$  est instable, il n'existe pas de matrice de gain négative telle que le système puisse être stabilisé, i.e.  $\nexists K_s \in \mathbb{R}_-^{m \times n}$  tel que  $A - BK_s$  soit une matrice de Metzler stable. La preuve de ce résultat découle directement de celle du lemme 2.11 et sera donc omise.

Rappelons également que le lemme 2.12, quant à lui, ne peut être étendu aux systèmes positifs MIMO. Pour s'en convaincre, examinons l'exemple subséquent.

**Exemple 3.1.** *Considérons un système décrit par l'équation*

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.51 & 0 \\ 9 & -\frac{18}{700} & 0 \\ 4 & 0.5 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} u. \quad (3.1)$$

*Il s'avère que, dans ce cas, il n'existe pas de matrice  $K_s$  positive qui stabilise le système décrit par (3.1); la raison en sera explicitée par après. Cependant, la*



matrice de gain

$$K_s = \begin{bmatrix} -1 & -0.005 & 0 \\ 6 & 0.51 & 0 \end{bmatrix}$$

est telle que  $A - BK_s$  est une matrice de Metzler, et  $\sigma(A - BK_s) = \{-5.5, -0.0107, -1\}$ .

Ainsi, grâce à cet exemple, nous remarquons que, pour les systèmes SISO, nous pouvons nous focaliser sur les matrices de gain positives, ce qui n'est manifestement pas le cas pour les systèmes MIMO.

Nous souhaitons maintenant adapter le lemme 2.10 aux systèmes MIMO dans le but de fournir une condition nécessaire et suffisante pour la stabilisation de systèmes LTI positifs, via l'utilisation d'inégalités bilinéaires. Pour le reste du chapitre, nous supposons que le système (1.1) est instable, i.e. que la matrice  $A$  possède au moins une valeur propre dont la partie réelle est positive.

**Corollaire 3.1.** *Un système de la forme (1.1) est stabilisable par une matrice de gain  $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$  si et seulement si il existe une matrice  $\mathcal{K} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  et un vecteur  $d \in \text{int}(\mathbb{R}_+^n)$  tels que  $A - B\mathcal{K}$  soit une matrice de Metzler et que le problème d'inégalités matricielles bilinéaires*

$$-(A - B\mathcal{K})d \in \text{int}(\mathbb{R}_+^n) \tag{3.2}$$

*soit résoluble.*

Ce corollaire, découlant des résultats énoncés et démontrés précédemment, fournit donc une condition nécessaire et suffisante pour la stabilisabilité de systèmes (1.1), qui ne fasse pas intervenir l'analyse du spectre pour le système en boucle fermée résultant. Malheureusement, Toker et Özbay ont montré<sup>1</sup> qu'en général, la résolubilité d'inégalités matricielles bilinéaires consiste en un problème  $\mathcal{NP}$ -difficile ( $\mathcal{NP}$ -hard problem), pour lequel nous ne pouvons trouver aisément de solution (de manière plus générale, les algorithmes connus pour résoudre ce type de problème ont un temps d'exécution exponentiel et sont donc difficilement exploitables en pratique, même pour des problèmes de taille raisonnable). C'est pourquoi nous montrerons, dans la suite de ce chapitre, comment le corollaire 3.1 peut être modifié dans le but de se ramener à des problèmes plus simples à résoudre.

---

1. O. Toker et H. Özbay, On the NP-hardness of solving bilinear matrix inequalities and simultaneous stabilization with static output feedback, *Proceedings of the 1995 American Control Conference*, Seattle, Washington, 1995

Avant de présenter le résultat principal de cette sous-section, considérons un cas particulier de système LTI positif MIMO, pour lequel la matrice  $B$  possède des lignes unitaires et est de rang plein. Nous pouvons alors énoncer le théorème suivant :

**Théorème 3.1.** *Considérons un système de la forme (1.1), où  $B$  possède des lignes unitaires. Définissons  $K_s \in \mathbb{R}^{m \times n}$  de la sorte :  $\forall j \neq i$ , si  $b_{ji} = 0$ , alors*

$$k_s^{ii} > \frac{a_{ii}}{b_{ii}},$$

*sinon*

$$k_s^{rj} = \min_{j \neq i, b_{ir} \neq 0} \left\{ \frac{a_{ij}}{b_{ir}} \right\}.$$

*Alors, il existe une matrice  $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$  telle que  $A - BK$  est une matrice de Metzler stable si et seulement si  $A - BK_s$  est une matrice de Metzler stable.*

*Démonstration.* La preuve de ce résultat est semblable à celle du théorème 2.1.

La condition est nécessaire :

Montrons dans un premier temps que  $A - BK_s$  est une matrice de Metzler. Pour cela, prouvons que,  $\forall i \neq j$ ,

$$(A - BK_s)_{ij} = a_{ij} - \sum_{r=1}^m b_{ir} k_s^{rj} \geq 0,$$

c'est-à-dire que,  $\forall i \neq j$ ,  $a_{ij} \geq \sum_{r=1}^m b_{ir} k_s^{rj}$ . Deux cas sont alors envisageables :

1. Soit  $b_{ir} = 0$ ,  $\forall r$  ; dans ce cas, la condition ci-dessus devient

$$a_{ij} \geq 0 \quad \forall i \neq j,$$

ce qui est toujours vrai puisque  $A$  est une matrice de Metzler.

2. Soit  $\exists ! r \in \underline{m}$  tel que  $b_{ir} \neq 0$  (notons cet indice  $\tilde{r}$ ) ; alors, par définition de  $K_s$ , nous savons que

$$k_s^{\tilde{r}j} = \min_{j \neq i, b_{i\tilde{r}} \neq 0} \left\{ \frac{a_{ij}}{b_{i\tilde{r}}} \right\} \leq \frac{a_{ij}}{b_{i\tilde{r}}} \quad \forall i \neq j$$

et donc

$$a_{ij} \geq b_{i\tilde{r}} k_s^{\tilde{r}j} = \sum_{r=1}^m b_{ir} k_s^{rj} \quad \forall i \neq j.$$

Prouvons maintenant que  $A - BK_s$  est une matrice stable. Par le lemme 2.10, il suffit de montrer qu'il existe  $d \in \text{int}(\mathbb{R}_+^n)$  tel que  $-(A - BK_s)d \in \text{int}(\mathbb{R}_+^n)$ . Puisque  $A$  est une matrice de Metzler stable, nous savons qu'il existe  $\tilde{d} \in \text{int}(\mathbb{R}_+^n)$  tel que  $-A\tilde{d} \in \text{int}(\mathbb{R}_+^n)$ . En reprenant ce  $\tilde{d}$ , nous avons que

$$-(A - BK_s)\tilde{d} = -A\tilde{d} + BK_s\tilde{d} \in \text{int}(\mathbb{R}_+^n)$$

car  $-A\tilde{d} \in \text{int}(\mathbb{R}_+^n)$ ,  $B \in \mathbb{R}_+^{n \times m}$ ,  $K_s \in \mathbb{R}_+^{m \times n}$  et  $\tilde{d} \in \text{int}(\mathbb{R}_+^n)$ .

La condition est suffisante :

Ce résultat est immédiat, en choisissant  $K = K_s$ .

□

Les résultats du théorème 2.1 (traitant le cas des systèmes SISO) sont en fait un cas particulier du théorème 3.1 puisque la matrice  $b$  du théorème 2.1 possède clairement des lignes unitaires.

Illustrons maintenant les résultats du théorème 3.1 via l'exemple subséquent.

**Exemple 3.2.** *Considérons un système positif instable décrit par l'équation*

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} u.$$

*Il apparaît clairement que la matrice  $B$  possède des lignes unitaires, nous pouvons donc appliquer le théorème 3.1 dans le but de trouver la matrice  $K_s$  (si elle existe). Nous construisons  $K_s$  comme indiqué dans l'énoncé du théorème 3.1 et nous obtenons*

$$K_s = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

*où  $k_s^{22} > 0$  a été posé arbitrairement à un. La matrice en boucle fermée résultante est alors donnée par*

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

*qui est indéniablement une matrice de Metzler stable.*

Le théorème 3.1 fournit donc une condition nécessaire et suffisante pour qu'un système LTI positif MIMO dit "à lignes unitaires" soit stable. Nous souhaitons maintenant retourner à un résultat plus général. Notre premier objectif sera d'utiliser le corollaire 3.1 pour le cas où chaque colonne de la matrice  $B$  contient au moins deux entrées non nulles, i.e. les colonnes de  $B$  sont toutes non-unitaires.

**Lemme 3.1.** *Considérons un système de la forme (1.1), où  $\text{rg}(B) = m$  et chaque colonne de  $B$  est non-unitaire. Soit  $\bar{K} \in \mathbb{R}_+^{m \times n}$ , et définissons  $n$  polytopes  $P_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , par l'ensemble d'inégalités*

$$\begin{aligned} a_{1i} - b_{11}\bar{k}_{1i} - \dots - b_{1m}\bar{k}_{mi} &\geq 0 \\ &\vdots \\ a_{(i-1)i} - b_{(i-1)1}\bar{k}_{1i} - \dots - b_{(i-1)m}\bar{k}_{mi} &\geq 0 \\ a_{ii} - b_{i1}\bar{k}_{1i} - \dots - b_{im}\bar{k}_{mi} &\leq 0 \\ a_{(i+1)i} - b_{(i+1)1}\bar{k}_{1i} - \dots - b_{(i+1)m}\bar{k}_{mi} &\geq 0 \\ &\vdots \\ a_{ni} - b_{n1}\bar{k}_{1i} - \dots - b_{nm}\bar{k}_{mi} &\geq 0. \end{aligned}$$

Soit  $V_i$ , l'ensemble des sommets propres à  $P_i$ . Alors le système est stabilisable si et seulement si il existe un ensemble de sommets  $k_s^i \in V_i$  tels que

$$A - BK_s, \tag{3.3}$$

où  $K_s = [k_s^1 \dots k_s^n]$ , soit stable.

Avant de prouver ce résultat, intéressons-nous à la remarque suivante :

**Remarque 3.1.** *Dans le lemme 3.1, nous nous restreignons à  $K_s \in \mathbb{R}_+^{m \times n}$ , mais cette restriction n'est en fait pas nécessaire : n'importe quelle borne  $k_l \in \mathbb{R}_-$  pour les éléments de  $K_s$  peut être choisie.*

Notons également que l'ensemble d'inégalités dans le lemme 3.1 est une simple conséquence de la propriété Metzler de la matrice  $A - B\bar{K}$ . Ainsi, la  $ii^e$  inégalité se voit munie du symbole "plus petit ou égal à zéro" car pour tout système LTI positif, toutes les sous-matrices principales doivent être stables, incluant la  $ii^e$  entrée (ce résultat provient du lemme 2.10). Nous pouvons donc écarter tous les sommets qui tombent dans l'hyperplan généré par la  $ii^e$  inégalité. Si nous choisissons un sommet dans cet hyperplan, la  $ii^e$  entrée de la matrice en boucle fermée

résultante vaudra zéro et ne sera donc clairement pas stable. De plus, tout sommet ne possédant que des composantes négatives peut également être écarté, par un raisonnement similaire à celui effectué - dans le cas des systèmes SISO - pour le vecteur de stabilisation  $k_s$  qui devait être positif.

Enfin, remarquons qu'une matrice de gain stabilisante  $K_s$ , s'il en existe, peut être trouvée par énumération, en vérifiant la liste finie des sommets générant  $K_s$  qui résulte de l'examination de chacun des sommets de (3.3).

Nous pouvons maintenant démontrer le lemme 3.1.

*Démonstration.* Tout d'abord, puisque - par hypothèse -  $B$  est de rang plein et possède au moins deux éléments non nuls dans chaque colonne,  $P_i$  est bien un polytope et l'ensemble de sommets  $V_i$  existe. Ensuite, par l'absurde, supposons qu'il existe une matrice  $K$  telle que  $A - BK$  soit stable, mais qu'il n'existe pas de  $K_s$  (comme défini en (3.3)) qui stabilise  $A - BK_s$ . Puisqu'il existe une matrice  $K$  stabilisant  $A - BK$ , alors  $(A - BK)^T$  doit être stable, et il existe ainsi - par le corollaire 3.1 - un vecteur  $d \in \text{int}(\mathbb{R}_+^n)$  tel que

$$-(A - BK)^T d = -(A^T - K^T B^T) d \in \text{int}(\mathbb{R}_+^n). \quad (3.4)$$

Supposons, sans perte de généralité, que la première colonne ( $k_1$ ) de la matrice  $K$  n'appartienne pas à  $V_1$ , i.e.  $k_1 \notin V_1$ . En reprenant (3.4), nous pouvons dresser le problème de programmation linéaire suivant :

$$\max_{k_1} -(a_1 - k_1 B^T) d$$

sous contraintes

$$\begin{aligned} a_{11} - b_{11}k_{11} - \dots - b_{1m}k_{m1} &\leq 0 \\ a_{21} - b_{21}k_{11} - \dots - b_{2m}k_{m1} &\geq 0 \\ &\vdots \\ a_{n1} - b_{n1}k_{11} - \dots - b_{nm}k_{m1} &\geq 0 \end{aligned}$$

où  $k_1 = [k_{11} \dots k_{m1}]$ ,  $a_1 = [a_{11} \dots a_{n1}]$ , et la fonction à maximiser provient de la condition du corollaire 3.1. Nous savons que le maximum d'un problème de programmation linéaire est toujours obtenu à un sommet, i.e. il est nécessaire et suffisant de vérifier uniquement les sommets de  $P_1$ . Nous pouvons continuer ce processus pour chaque  $P_i$ ,  $i = 2, \dots, n$ , conduisant à la contradiction qu'il n'existe aucun  $K_s$  (comme défini en (3.3)) stabilisant.  $\square$

Illustrons maintenant l'importance du lemme 3.1 en retournant à l'exemple 3.1.

**Exemple 3.3.** *Considérons une nouvelle fois le système défini à l'exemple 3.1. Nous nous restreignons tout d'abord à une matrice de gain  $K_s$  positive, ce qui illustrera qu'il n'existe en fait aucune matrice de gain négative qui puisse résoudre le problème de stabilisation, comme signalé dans l'exemple 3.1. Par après, nous verrons qu'il est possible pour la matrice de gain de prendre des valeurs négatives, bornées inférieurement (arbitrairement par -1), et de stabiliser malgré cela le système (3.1). Définissons dans un premier temps les polytopes  $P_1$ ,  $P_2$  et  $P_3$ .*

$P_1$  est défini par

$$\begin{aligned} 0.5 - \bar{k}_{21} &\leq 0 \\ 9 - 3\bar{k}_{11} &\geq 0 \\ 4 - 2\bar{k}_{11} - \bar{k}_{21} &\geq 0 \end{aligned}$$

avec  $\bar{k}_{i1} \in \mathbb{R}_+$ ,  $i \in \{1, 2\}$ .

L'ensemble de sommets résultant est  $V_1 = \{[0 \ 4]^T\}$ . Nous pouvons écarter tous les autres sommets puisque, suivant la remarque 3.1, aucun sommet dans l'hyperplan  $0.5 - \bar{k}_{21} = 0$  ne peut être retenu comme candidat possible.

$P_2$  est, lui, défini par

$$\begin{aligned} 0.51 - \bar{k}_{22} &\geq 0 \\ -\frac{18}{700} - 3\bar{k}_{12} &\leq 0 \\ 0.5 - 2\bar{k}_{12} - \bar{k}_{22} &\geq 0 \end{aligned}$$

avec  $\bar{k}_{i2} \in \mathbb{R}_+$ ,  $i \in \{1, 2\}$ .

Nous obtenons ainsi l'ensemble de sommets  $V_2 = \{[0 \ 0.5]^T, [0 \ 0]^T, [0.25 \ 0]^T\}$ .

Finalement,  $P_3$  est défini par

$$\begin{aligned} 0 - \bar{k}_{23} &\geq 0 \\ 0 - 3\bar{k}_{13} &\geq 0 \\ -1 - 2\bar{k}_{13} - \bar{k}_{23} &\leq 0 \end{aligned}$$

avec  $\bar{k}_{i3} \in \mathbb{R}_+$ ,  $i \in \{1, 2\}$ .

L'ensemble de sommets résultant est  $V_3 = \{[0 \ 0]^T\}$ .

Nous pouvons montrer, par énumération, que la matrice de gain la plus avantageuse générée par  $V_1$ ,  $V_2$  et  $V_3$  est

$$K_s = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0.5 & 0 \end{bmatrix},$$

pour laquelle l'ensemble des valeurs propres en boucle fermée sera donné par

$$\sigma(A - BK_s) = \{-3.526, 0, -1\}.$$

Notre matrice de gain positive  $K_s$  ne stabilise donc évidemment pas le système (3.1) puisque l'une des valeurs propres en boucle fermée est nulle.

Nous levons maintenant la condition de positivité des matrices de gain et forçons, à la place, toutes les entrées de la matrice  $K_s$  à être plus grandes ou égales à -1. La définition des polytopes  $P_1$ ,  $P_2$  et  $P_3$  reste identique, excepté pour la condition de bornitude. Les nouveaux ensembles de sommets résultants sont alors donnés par  $V_1 = \{[-1 \ 6]^T\}$ ,  $V_2 = \{[0.25 \ 0]^T, [-0.005 \ 0.51]^T\}$  et  $V_3 = \{[0 \ 0]^T\}$ , qui engendrent la même matrice de gain  $K_s$  que dans l'exemple 3.1, où la matrice du système en boucle fermée est

$$(A - BK_s) = \begin{bmatrix} -5.5 & 0 & 0 \\ 12 & -0.0107 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Considérons maintenant le cas où la matrice d'entrée  $B$  possède au moins une colonne avec seulement une entrée non nulle, i.e. une ou plusieurs colonne(s) unitaire(s)<sup>2</sup>. Notons bien que ce cas a déjà été abordé pour les systèmes SISO (théorème 2.1 partie (b)) et qu'il s'agit donc simplement d'une extension aux systèmes MIMO.

**Corollaire 3.2.** *Considérons un système de la forme (1.1), où  $\text{rg}(B) = m$  et  $B$  possède une colonne unitaire ( $b_i$ ). Sans perte de généralité, choisissons  $i = 1$ . Alors le système est stabilisable si et seulement si il existe une matrice de gain  $K_s^{2,\dots,n} \in \mathbb{R}^{m \times (n-1)}$  telle que  $[A - B[0_{n \times 1} K_s^{2,\dots,n}]]^1$  soit stable.*

---

2. Sans perte de généralité, nous pouvons négliger le cas des colonnes nulles.

*Démonstration.* La condition est nécessaire :

Cette implication est immédiate par la généralisation du théorème 2.1 au cas des systèmes MIMO.

La condition est suffisante :

Posons  $K_s = [k_s^1 K_s^{2,\dots,n}]$ , où  $K_s^{2,\dots,n} \in \mathbb{R}^{m \times (n-1)}$  stabilise  $[A]^1$ , i.e.

$$A_c = \left[ \begin{array}{c|ccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \hline a_{21} & & & \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & & & \end{array} \right] - B[0_{n \times 1} K_s^{2,\dots,n}]$$

avec  $[A_c]^1$  stable. Par un raisonnement similaire à la preuve du théorème 2.1, nous savons que nous pouvons poser arbitrairement le premier élément  $k_s^{11}$  de  $k_s^1$  à une valeur (positive) suffisamment grande (tous les autres éléments de  $k_s^1$  peuvent être posés à n'importe quelle valeur), puisqu'aucune contrainte ne nous y empêche. De ce fait, si  $[A]^1$  est stabilisable,  $A$  l'est aussi.  $\square$

Remarquons que, même s'il est toujours possible de trouver une valeur suffisamment grande pour  $k_s^{11}$  à partir du moment où  $[A]^1$  est stabilisable, cette valeur pourrait s'avérer très élevée. De ce fait, le concepteur de la matrice de stabilisation pourrait éventuellement vouloir placer une borne supérieure  $k_u \in \mathbb{R}_+$  sur la valeur de  $k_s^{11}$ . Cependant, cette borne pourrait ne pas être suffisamment élevée pour fournir la stabilité. Il est possible de trouver  $k_s^{11}$  via une recherche unidimensionnelle qui consiste à fixer (et éventuellement à modifier) une borne supérieure  $k_u \in \mathbb{R}_+$ .

Nous souhaitons maintenant combiner les résultats du lemme 3.1 et du corollaire 3.2.

**Théorème 3.2.** *Considérons un système de la forme (1.1), où  $\text{rg}(B) = m$ ,  $B$  possède une ou plusieurs ligne(s) non-unitaire(s), et (sans perte de généralité) les colonnes  $1, \dots, j$  de  $B$  sont unitaires et les colonnes  $j+1, \dots, m$  ne le sont pas. Supposons également que les éléments de  $K_s$  soient bornés inférieurement et supérieurement par  $k_l \in \mathbb{R}_-$  et  $k_u \in \mathbb{R}_+$  respectivement.*

*Soit  $\bar{K} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . Posons  $\bar{k}_{rr} = k_u$  pour  $r = 1, \dots, j$  et définissons  $n$  polytopes  $P_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , par l'ensemble d'inégalités*



$$\begin{array}{rcl}
a_{1i} - b_{11}\bar{k}_{1i} - \dots - b_{1m}\bar{k}_{mi} & \geq & 0 \\
\vdots & & \vdots \\
a_{(i-1)i} - b_{(i-1)1}\bar{k}_{1i} - \dots - b_{(i-1)m}\bar{k}_{mi} & \geq & 0 \\
a_{ii} - b_{i1}\bar{k}_{1i} - \dots - b_{im}\bar{k}_{mi} & \leq & 0 \\
a_{(i+1)i} - b_{(i+1)1}\bar{k}_{1i} - \dots - b_{(i+1)m}\bar{k}_{mi} & \geq & 0 \\
\vdots & & \vdots \\
a_{ni} - b_{n1}\bar{k}_{1i} - \dots - b_{nm}\bar{k}_{mi} & \geq & 0.
\end{array}$$

Soit  $V_i$ , l'ensemble des sommets propres à  $P_i$ . Alors il existe une matrice stabilisant le système, dont les éléments sont bornés par  $(k_l, k_u)$ , si et seulement si il existe un ensemble de sommets  $k_s^i \in V_i$  tels que  $A - BK_s$ , où  $K_s = [k_s^1 \dots k_s^n]$ , soit stable.

La preuve de ce théorème sera omise puisqu'il s'agit d'une conséquence directe de l'ensemble des résultats précédents.

## 3.2 Algorithme

Nous pouvons maintenant fournir un algorithme permettant - si cela est possible - de générer une matrice de gain stabilisante pour un système de la forme (1.1), ou d'indiquer que le système n'est pas stabilisable. Cet algorithme synthétise les résultats développés dans le chapitre 3.

**Algorithme 3.1.** Soient  $A$  une matrice de Metzler instable et  $B$  une matrice positive telle que  $\text{rg}(B) = m$ .

1. Si toutes les lignes de  $B$  sont unitaires, on applique le théorème 3.1 dans le but de trouver une matrice de gain stabilisante  $K_s$ , et on retourne " $(A, B)$ -stabilisable" ainsi que la matrice de gain  $K_s$ ; si le système n'est pas stabilisable, on retourne " $(A, B)$ -non stabilisable" et on s'arrête; si  $B$  possède une ou plusieurs ligne(s) non unitaire(s), on passe à l'étape suivante.
2. On fournit des bornes inférieure et supérieure  $(k_l$  et  $k_u)$  sur les entrées de la matrice de gain  $K_s$ , et on passe à l'étape suivante.
3. Si la  $i^e$  colonne de  $B$  est unitaire, on pose  $k_s^{ii} = k_u$ , on applique le théorème 3.2 dans le but de trouver les ensembles de sommets  $V_1, V_2, \dots, V_n$ , et on passe à l'étape suivante.

4. On trouve une matrice de gain stabilisante  $K_s = [k_s^1 \dots k_s^n]$ , où  $k_s^i \in V_i$ , pour  $i = 1, \dots, n$ , en procédant par énumération : si cela est possible, on retourne "(A, B)-stabilisable" ainsi que la matrice de gain  $K_s$ , sinon, on retourne "(A, B)-non stabilisable" et on s'arrête.

Dans cet algorithme, les bornes sur les entrées de la matrice de gain  $K_s$  servent simplement à éviter les éventuels problèmes liés à l'infinitude qui pourraient survenir. En effet, il est impossible - dans la pratique - d'obtenir des "gains infinis", d'où la nécessité de choisir des bornes appropriées en fonction de l'application étudiée. Notons également qu'il serait possible, grâce aux résultats des théorème 3.1 et corollaire 3.2, d'ajouter des sous-routines permettant d'accélérer le processus d'énumération pour la recherche de la matrice de gain  $K_s$ .

Avant d'illustrer le fonctionnement de l'algorithme 3.1, étudions l'exemple subséquent grâce auquel nous pourrions nous apercevoir dans quelle mesure la stabilisation LTI positive - comme définie au chapitre 1 - est plus restrictive que la stabilisation standard de systèmes LTI.

**Exemple 3.4.** *Considérons un système décrit par l'équation*

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u.$$

Nous constatons que la matrice  $A$  possède deux valeurs propres stables (à savoir  $\lambda_1 = -\frac{3}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$  et  $\lambda_2 = -\frac{3}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$ ) et une valeur propre nulle ( $\lambda_3 = 0$ ). Puisque

$$\text{rg}([A - \lambda_3 I \quad b]) = 3,$$

le système est bien stabilisable au sens LTI standard. Cependant, les conditions nécessaires à la stabilisabilité positive - énoncées dans le théorème 2.1 - ne sont pas remplies. De ce fait, nous pouvons nous apercevoir que la stabilisation LTI standard n'est pas équivalente à la stabilisation positive.

L'exemple suivant illustre le fonctionnement de l'algorithme 3.1.

**Exemple 3.5.** *Considérons un système positif décrit par l'équation*

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} u.$$

Par l'algorithme 3.1, nous vérifions tout d'abord si le système est stable. Puisque  $a_{11} = 0$ , nous savons (par le lemme 2.10) que  $A$  ne peut pas être stable. Nous fournissons ensuite les valeurs  $(k_l, k_u) = (-10, 10)$ , arbitrairement. Nous passons alors à la troisième étape de l'algorithme et remarquons que la troisième colonne de la matrice  $B$  est unitaire; nous posons donc  $k_{33} = 10$ . Nous cherchons maintenant à déterminer les ensembles de sommets  $V_1, V_2, V_3$  et  $V_4$  - tout en gardant bien à l'esprit la remarque 3.1 - et obtenons

$$\begin{aligned} V_1 &= \{[0.5 \ 0 \ 1.5]^T, [0.5 \ 0 \ -10]^T\}, \\ V_2 &= \{[11 \ -10 \ 0]^T, [11 \ -10 \ -10]^T\}, \\ V_3 &= \{[1 \ 0 \ 10]^T\}, \\ V_4 &= \{[0 \ 2 \ -1]^T, [-10 \ 12 \ -1]^T, [-10 \ 12 \ -10]^T, [0 \ 2 \ -10]^T\}. \end{aligned}$$

Ainsi, par énumération, nous obtenons la matrice de gain

$$K_s = \begin{bmatrix} 0.5 & 11 & 1 & 0 \\ 0 & -10 & 0 & 2 \\ 1.5 & 0 & 10 & -1 \end{bmatrix},$$

générant la matrice en boucle fermée

$$\begin{aligned} A_c &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 & 11 & 1 & 0 \\ 0 & -10 & 0 & 2 \\ 1.5 & 0 & 10 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -24 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & -3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

qui est clairement une matrice de Metzler stable.

### 3.3 Stabilisation de l'état estimé

Nous concluons ce chapitre en traitant - une nouvelle fois - de la stabilisation d'état estimé.

Dans le chapitre précédent, nous avons montré que le principe de séparation séquentielle était valable pour les systèmes positifs SISO. Nous allons maintenant montrer qu'en général, ce principe n'est pas valide pour les systèmes positifs MIMO, à moins d'ajouter une condition supplémentaire lors de la recherche de la

matrice de gain  $K_s$ . Les résultats étant fort similaires à ceux développés dans le chapitre précédent, nous omettrons la majeure partie des détails.

En notant  $\hat{x}$  l'état estimé, nous avons

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - \hat{y}),$$

où  $\hat{y} = C\hat{x}$ . En supposant maintenant que  $u = -K_s\hat{x}$ , avec  $K_s$  choisi de telle manière que  $A - BK_s$  soit une matrice de Metzler stable, nous obtenons

$$\dot{x} = (A - BK_s)x + BK_s(x - \hat{x}), \quad (3.5)$$

donc si  $e_x = x - \hat{x} \in \mathbb{R}_+^n$  et  $BK_s \geq 0$  composante par composante, alors  $x \in \mathbb{R}_+^n$  en tout temps.

Rappelons que

$$\dot{e}_x = (A - LC)e_x,$$

et si  $e_x \in \mathbb{R}_+^n$  initialement, alors  $e_x \in \mathbb{R}_+^n$  en tout temps. Nous avons donc juste à nous assurer que  $BK_s \geq 0$  (composante par composante) et poser la condition initiale de  $\hat{x}$  à zéro.

Ainsi, à moins que  $K_s$  soit déjà positive,  $BK_s$  ne doit pas nécessairement être positive. Remarquons également que, dans le cas de la stabilisation d'état estimé, une condition supplémentaire (i.e.  $BK_s \geq 0$  composante par composante) doit être ajoutée à l'algorithme 3.1 pour garantir que l'équation (3.5) est bien satisfaite.

# Chapitre 4

## Application aux modèles de réacteur tubulaire

Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser à un cas particulier de système, à savoir celui relatif aux modèles de réacteur tubulaire, dits à écoulement piston et à dispersion axiale. Nous nous basons sur la description du système faite dans [11] et souhaitons appliquer, dans la mesure du possible, les résultats théoriques (provenant principalement de [9]) développés dans les chapitres précédents. Cette étude - comprenant les calculs, graphes, résultats, interprétations et programmes informatiques décrits et explicités dans ce chapitre - est inédite et propre à ce mémoire.

Dans un premier temps, nous allons modéliser le système et discrétiser le modèle ainsi obtenu. Ensuite, nous discuterons brièvement du modèle et des résultats théoriques précédents de manière analytique. Finalement, nous développerons des tests numériques - grâce au logiciel MATLAB - dans le but d'étudier le comportement et les caractéristiques du système.

### 4.1 Modélisation du système

Considérons la réaction chimique suivante :



où  $C_1$  est le réactif,  $C_2$  est le produit et  $b > 0$  est le coefficient stoechiométrique de la réaction, i.e. le coefficient qui nous donne les nombres relatifs de moles du réactif et du produit. La dynamique de ce processus dans un réacteur tubulaire à dispersion axiale est donnée, pour tout temps  $t \geq 0$  et pour tout  $z \in [0, L]$  où  $L$  est la longueur du réacteur, par les équations de conservation des masses

$$\frac{\partial x_1}{\partial t} = D_a \frac{\partial^2 x_1}{\partial z^2} - v \frac{\partial x_1}{\partial z} - r(x_1, x_2) \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial t} = D_a \frac{\partial^2 x_2}{\partial z^2} - v \frac{\partial x_2}{\partial z} + br(x_1, x_2) \quad (4.3)$$

avec les conditions aux limites

$$D_a \frac{\partial x_1}{\partial z}(z = 0, t) - vx_1(z = 0, t) = -vx_{in}(t) \quad (4.4)$$

$$D_a \frac{\partial x_2}{\partial z}(z = 0, t) - vx_2(z = 0, t) = 0 \quad (4.5)$$

$$D_a \frac{\partial x_1}{\partial z}(z = L, t) = 0 \quad (4.6)$$

$$D_a \frac{\partial x_2}{\partial z}(z = L, t) = 0 \quad (4.7)$$

où  $x_1(z, t)$ ,  $x_2(z, t)$ ,  $x_{in}(t)$ ,  $v$ ,  $D_a$  et  $r$  sont - respectivement - les concentrations de  $C_1$  et  $C_2$  (mol/l), la concentration du réactif entrant (mol/l), la vitesse superficielle du fluide (m/s), le coefficient de dispersion axiale (m<sup>2</sup>/s), et la vitesse de réaction (mol/l s).

Supposons que la cinétique chimique ne dépende que de la concentration  $x_1$  de réactif, et considérons un modèle de vitesse de réaction de la forme  $r = k_0 x_1$ , où  $k_0$  est la constante cinétique (s<sup>-1</sup>). Un tel choix correspond à une cinétique de premier ordre pour la réaction (4.1). De plus, ce modèle de vitesse de réaction est une version linéarisée d'un modèle de cinétique non-linéaire. Nous pouvons donc réécrire les équations du modèle dynamique (4.2) et (4.3) sous la forme linéaire suivante :

$$\frac{\partial x_1}{\partial t} = D_a \frac{\partial^2 x_1}{\partial z^2} - v \frac{\partial x_1}{\partial z} - k_0 x_1 \quad (4.8)$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial t} = D_a \frac{\partial^2 x_2}{\partial z^2} - v \frac{\partial x_2}{\partial z} + bk_0 x_1. \quad (4.9)$$

Les équations (4.4), (4.5), (4.6), (4.7), (4.8) et (4.9), munies de conditions initiales adéquates, définissent le modèle dynamique de base.

## 4.2 Discrétisation du modèle

Le modèle décrit dans la section précédente est un modèle en dimension infinie. Nous souhaitons maintenant nous ramener à un modèle en dimension finie. Nous allons donc discrétiser le modèle initial par rapport à la variable spatiale.

Nous considérons la méthode des différences finies régressives pour les dérivations du premier ordre et la méthode des différences finies centrées pour les dérivations du second ordre, avec  $\Delta z$  le pas de discrétisation et  $n$  le nombre de points de discrétisation ( $(n - 1)\Delta z = L$ , avec  $n - 1$  le nombre de pas de discrétisation).

Avant de réécrire ce système, faisons un bref rappel sur la méthode des différences finies. Notre système initial est décrit par des équations aux dérivées partielles ; ce problème n'est pas aisément résoluble et nous allons donc utiliser une méthode de résolution particulière - la méthode des différences finies - dont le principe est de passer à un modèle discret et non plus continu, en transformant les dérivées partielles, données sous forme de limites de fonctions, en accroissements.

Prenons, par exemple, le cas d'une fonction  $f(z, t)$  et rappelons l'expression exacte des dérivées partielles selon  $z$  et  $t$ . En choisissant une définition progressive, nous avons

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial z}(z, t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z + h, t) - f(z, t)}{h} \\ \frac{\partial f}{\partial t}(z, t) &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(z, t + k) - f(z, t)}{k}\end{aligned}$$

et en prenant des pas  $h$  et  $k$  suffisamment petits pour pouvoir laisser tomber la limite, nous obtenons les formules approchées

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial z}(z, t) &\approx \frac{f(z + h, t) - f(z, t)}{h} \\ \frac{\partial f}{\partial t}(z, t) &\approx \frac{f(z, t + k) - f(z, t)}{k}.\end{aligned}$$

Avec une telle écriture, nous supposons que l'information sur la fonction inconnue  $f$  n'est disponible qu'en certains points. Nous nous ramenons donc à la construction d'une grille dans un espace à deux dimensions  $z$  et  $t$ , où les abscisses  $z$  sont distantes de  $h$  et les ordonnées  $t$ , de  $k$ .

Remarquons que, pour notre modèle de réacteur tubulaire, la méthode de la différence progressive n'est pas vraiment adéquate puisque nous souhaitons connaître l'état du système aux points ultérieurs à partir des points antérieurs, et non l'inverse. Nous avons donc choisi d'utiliser la méthode de la différence régressive pour la dérivation du premier ordre. Nous nous servons donc de la formulation

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial z}(z, t) &\approx \frac{f(z, t) - f(z - h, t)}{h} \\ \frac{\partial f}{\partial t}(z, t) &\approx \frac{f(z, t) - f(z, t - k)}{k}\end{aligned}$$

avec  $h$  et  $k$  petits. Rappelons également que, pour la dérivation du second ordre, nous avons choisi la méthode de la différence centrée dont la formulation est

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(z, t) &\approx \frac{f(z + h, t) - 2f(z, t) + f(z - h, t)}{h^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(z, t) &\approx \frac{f(z, t + k) - 2f(z, t) + f(z, t - k)}{k^2}\end{aligned}$$

avec  $h$  et  $k$  petits. Nous pouvons maintenant calculer - à partir du système d'équations différentielles et au moyen de ces formules - notre modèle discrétisé.

Rappelons que nous avons posé précédemment  $(n - 1)\Delta z = L$ , ce qui signifie donc que nous avons discrétisé de manière uniforme (le pas de discrétisation  $\Delta z$  est fixe) notre modèle de réacteur tubulaire en  $n$  points  $z_i$ ,  $i \in \underline{n}$ . Signalons également que, par soucis de simplicité, nous n'écrirons pas explicitement dans nos calculs la dépendance des concentrations  $x_1$  et  $x_2$  en  $t$ .

Selon les conditions aux limites (4.4), (4.5), (4.6) et (4.7), et notre schéma de discrétisation, nous pouvons considérer quatre cas limites particuliers. Nous avons tout d'abord que

$$x_1(z_1 - \Delta z) \stackrel{not}{=} x_1(z_0) = x_{in}(t)$$

et que

$$x_2(z_1 - \Delta z) \stackrel{not}{=} x_2(z_0) = 0,$$

i.e. que les taux de variation des concentrations  $x_1$  et  $x_2$  sont nuls à l'entrée du réacteur, et ensuite que

$$x_1(z_n + \Delta z) \stackrel{not}{=} x_1(z_{n+1}) = 0$$

et que

$$x_2(z_n + \Delta z) \stackrel{not}{=} x_2(z_{n+1}) = 0,$$

i.e. qu'il n'y a rien en dehors du réacteur, ce qui semble évident.



Ainsi, en partant de l'équation (4.8), nous obtenons

– à l'entrée du réacteur, i.e. en  $z_1$  :

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(z_1) &= D_a \frac{\partial^2 x_1}{\partial z^2}(z_1) - v \frac{\partial x_1}{\partial z}(z_1) - k_0 x_1(z_1) \\
&\approx D_a \frac{x_1(z_1 + \Delta z) - 2x_1(z_1) + x_1(z_1 - \Delta z)}{\Delta z^2} \\
&\quad - v \frac{x_1(z_1) - x_1(z_1 - \Delta z)}{\Delta z} - k_0 x_1(z_1) \\
&= \frac{D_a}{\Delta z^2} (x_1(z_2) - 2x_1(z_1) + x_1(z_0)) - \frac{v}{\Delta z} (x_1(z_1) - x_1(z_0)) \\
&\quad - k_0 x_1(z_1) \\
&= \left(-\frac{v}{\Delta z} - 2\frac{D_a}{\Delta z^2} - k_0\right) x_1(z_1) + \frac{D_a}{\Delta z^2} x_1(z_2) + \left(\frac{v}{\Delta z} + \frac{D_a}{\Delta z^2}\right) x_{in}(t);
\end{aligned}$$

– à l'intérieur du réacteur, i.e. en tout  $z_i$  avec  $i \in \{2, \dots, n-1\}$  :

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(z_i) &= D_a \frac{\partial^2 x_1}{\partial z^2}(z_i) - v \frac{\partial x_1}{\partial z}(z_i) - k_0 x_1(z_i) \\
&\approx D_a \frac{x_1(z_i + \Delta z) - 2x_1(z_i) + x_1(z_i - \Delta z)}{\Delta z^2} \\
&\quad - v \frac{x_1(z_i) - x_1(z_i - \Delta z)}{\Delta z} - k_0 x_1(z_i) \\
&= \frac{D_a}{\Delta z^2} (x_1(z_{i+1}) - 2x_1(z_i) + x_1(z_{i-1})) - \frac{v}{\Delta z} (x_1(z_i) - x_1(z_{i-1})) \\
&\quad - k_0 x_1(z_i) \\
&= \left(\frac{v}{\Delta z} + \frac{D_a}{\Delta z^2}\right) x_1(z_{i-1}) + \left(-\frac{v}{\Delta z} - 2\frac{D_a}{\Delta z^2} - k_0\right) x_1(z_i) \\
&\quad + \frac{D_a}{\Delta z^2} x_1(z_{i+1});
\end{aligned}$$

– à la sortie du réacteur, i.e. en  $z_n$  :

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(z_n) &= D_a \frac{\partial^2 x_1}{\partial z^2}(z_n) - v \frac{\partial x_1}{\partial z}(z_n) - k_0 x_1(z_n) \\
&\approx D_a \frac{x_1(z_n + \Delta z) - 2x_1(z_n) + x_1(z_n - \Delta z))}{\Delta z^2} \\
&\quad - v \frac{x_1(z_n) - x_1(z_n - \Delta z)}{\Delta z} - k_0 x_1(z_n) \\
&= \frac{D_a}{\Delta z^2} (x_1(z_{n+1}) - 2x_1(z_n) + x_1(z_{n-1}))) - \frac{v}{\Delta z} (x_1(z_n) - x_1(z_{n-1})) \\
&\quad - k_0 x_1(z_n) \\
&= \left( \frac{v}{\Delta z} + \frac{D_a}{\Delta z^2} \right) x_1(z_{n-1}) + \left( -\frac{v}{\Delta z} - 2\frac{D_a}{\Delta z^2} - k_0 \right) x_1(z_n).
\end{aligned}$$

De même, en partant de l'équation (4.9), nous obtenons

– à l'entrée du réacteur, i.e. en  $z_1$  :

$$\begin{aligned}
\dot{x}_2(z_1) &= D_a \frac{\partial^2 x_2}{\partial z^2}(z_1) - v \frac{\partial x_2}{\partial z}(z_1) + b k_0 x_2(z_1) \\
&\approx D_a \frac{x_2(z_1 + \Delta z) - 2x_2(z_1) + x_2(z_1 - \Delta z))}{\Delta z^2} \\
&\quad - v \frac{x_2(z_1) - x_2(z_1 - \Delta z)}{\Delta z} + b k_0 x_2(z_1) \\
&= \frac{D_a}{\Delta z^2} (x_2(z_2) - 2x_2(z_1) + x_2(z_0))) - \frac{v}{\Delta z} (x_2(z_1) - x_2(z_0)) \\
&\quad + b k_0 x_2(z_1) \\
&= \left( -\frac{v}{\Delta z} - 2\frac{D_a}{\Delta z^2} - k_0 \right) x_2(z_1) + \frac{D_a}{\Delta z^2} x_2(z_2);
\end{aligned}$$

– à l'intérieur du réacteur, i.e. en tout  $z_i$  avec  $i \in \{2, \dots, n-1\}$  :

$$\begin{aligned}
x_2(z_i) &= D_a \frac{\partial^2 x_2}{\partial z^2}(z_i) - v \frac{\partial x_2}{\partial z}(z_i) + bk_0 x_2(z_i) \\
&\approx D_a \frac{x_2(z_i + \Delta z) - 2x_2(z_i) + x_2(z_i - \Delta z)}{\Delta z^2} \\
&\quad - v \frac{x_2(z_i) - x_2(z_i - \Delta z)}{\Delta z} + bk_0 x_2(z_i) \\
&= \frac{D_a}{\Delta z^2} (x_2(z_{i+1}) - 2x_2(z_i) + x_2(z_{i-1})) - \frac{v}{\Delta z} (x_2(z_i) - x_2(z_{i-1})) \\
&\quad + bk_0 x_2(z_i) \\
&= \left( \frac{v}{\Delta z} + \frac{D_a}{\Delta z^2} \right) x_2(z_{i-1}) + \left( -\frac{v}{\Delta z} - 2\frac{D_a}{\Delta z^2} + bk_0 \right) x_2(z_i) \\
&\quad + \frac{D_a}{\Delta z^2} x_2(z_{i+1});
\end{aligned}$$

– à la sortie du réacteur, i.e. en  $z_n$  :

$$\begin{aligned}
x_2(z_n) &= D_a \frac{\partial^2 x_2}{\partial z^2}(z_n) - v \frac{\partial x_2}{\partial z}(z_n) + bk_0 x_2(z_n) \\
&\approx D_a \frac{x_2(z_n + \Delta z) - 2x_2(z_n) + x_2(z_n - \Delta z)}{\Delta z^2} \\
&\quad - v \frac{x_2(z_n) - x_2(z_n - \Delta z)}{\Delta z} + bk_0 x_2(z_n) \\
&= \frac{D_a}{\Delta z^2} (x_2(z_{n+1}) - 2x_2(z_n) + x_2(z_{n-1})) - \frac{v}{\Delta z} (x_2(z_n) - x_2(z_{n-1})) \\
&\quad + bk_0 x_2(z_n) \\
&= \left( \frac{v}{\Delta z} + \frac{D_a}{\Delta z^2} \right) x_2(z_{n-1}) + \left( -\frac{v}{\Delta z} - 2\frac{D_a}{\Delta z^2} + bk_0 \right) x_2(z_n).
\end{aligned}$$

Ces résultats vont donc maintenant nous permettre d'exprimer notre système sous la forme d'une équation différentielle matricielle.

Nous pouvons ainsi écrire notre modèle discrétisé comme

$$\dot{x} = A^d x + B^d u$$

où

$$A^d = \begin{bmatrix} A_{11}^d & 0 \\ A_{21}^d & A_{22}^d \end{bmatrix},$$

$$B^d = [d_1 + d_2 \quad 0 \quad \cdots \quad 0]^T$$

et

$$x = [x_1(z_1), \dots, x_1(z_n), x_2(z_1), \dots, x_2(z_n)]^T$$

avec

$$A_{11}^d = \text{tridiag}[d_1 + d_2, -d_1 - 2d_2 - k_0, d_2],$$

$$A_{21}^d = \text{diag}[bk_0],$$

$$A_{22}^d = A_{11}^d + \text{diag}[k_0],$$

et

$$d_1 = \frac{v}{\Delta z}, \quad d_2 = \frac{D_a}{\Delta z^2}.$$

### 4.3 Approche analytique

Deux cas particuliers sont à considérer pour notre étude du réacteur tubulaire : le modèle de réacteur à écoulement piston (*plug-flow reactor*) lorsque  $D_a = 0$ , et le modèle de réacteur à dispersion axiale (*axial dispersion reactor*) lorsque  $D_a > 0$ . Les résultats traitant de l'observabilité et de la contrôlabilité du système, cités ci-dessous, proviennent de [11].

Penchons-nous tout d'abord sur le cas du réacteur à écoulement piston, c'est-à-dire lorsque  $d_2 = 0$ . Nous pouvons alors aisément vérifier, en testant le rang de la matrice d'observabilité du système, que le modèle linéaire décrit précédemment est observable si la sortie  $y$  est  $x_2(z_n)$ , i.e. si nous pouvons simplement mesurer la concentration du produit  $C_2$  à la sortie du réacteur. Il s'agit même, en fait, du seul choix possible (en terme de mesure de la concentration en un point unique) si

nous souhaitons que notre système soit observable. En effet, il est facile de montrer qu'au moins une ligne de la matrice d'observabilité sera identiquement nulle pour tout autre choix de mesure de la concentration du produit en un point unique, et que le déterminant de la matrice d'observabilité vaut  $(-1)^n b^n d_1^{n(n-1)} k_0^{n^2}$  lorsque  $y = x_2(z_n)$ . Si nous considérons à présent le cas du réacteur à dispersion axiale, nous obtenons un résultat très différent : le système sera observable si  $y = x_2(z_i)$  pour tout  $i \in \underline{n}$ , i.e. pour tout choix de mesure de la concentration de produit en un point unique.

Intéressons-nous maintenant à la contrôlabilité de notre système discrétisé. Prenons comme entrée  $x_{in}(t)$ . Nous pouvons facilement vérifier que la matrice de contrôlabilité est de rang plein, que ce soit pour le réacteur à écoulement piston ou pour le réacteur à dispersion axiale. Le système est donc contrôlable dans chacun des deux cas (sauf pour certaines combinaisons particulières de valeurs des paramètres  $k_0$ ,  $d_1$  et  $d_2$  pour le cas du réacteur à dispersion axiale). Tout comme nous l'avons fait pour la matrice d'observabilité, nous pouvons calculer le déterminant de la matrice de contrôlabilité, qui est égal à  $b^n d_1^{n(n+1)} k_0^{n^2}$ .

À présent, nous souhaitons faire le parallèle entre notre modèle de réacteur tubulaire et les résultats développés dans les chapitres précédents. La première remarque importante à faire est que le système linéaire discrétisé est un système positif (en choisissant les matrices  $C$  et  $D$  de manière appropriée) puisque  $A$  est bien une matrice de Metzler et  $B$  est bien une matrice positive (théorème 1.1). Nous savons donc que pour tout état initial positif et pour toute entrée positive, l'état du système et la sortie restent positifs, ce qui semble assez logique puisque l'entrée et l'état sont des concentrations molaires.

Puisque nous nous intéressons principalement à la concentration de produit à la sortie du réacteur, nous pouvons considérer que nous avons un système linéaire positif SISO, avec une entrée  $u = x_{in}(t)$  et une sortie  $y = x_2(z_n)$ . Il est donc possible d'appliquer le théorème 2.1 (ou, de manière plus générale, le théorème 3.1) et de construire une matrice de gain  $k_s \in \mathbb{R}_+^{1 \times n}$  selon le schéma défini. La section suivante sera partiellement consacrée à ce résultat et nous fournira une approche numérique du problème.

**Remarque 4.1.** *En analysant le système matriciel de nos modèles de réacteur et le schéma de construction de la matrice de gain  $k_s$ , nous pouvons déjà tirer quelques déductions quant à la forme de cette dernière.*

Pour notre modèle de réacteur à écoulement piston, la matrice  $A$  est une matrice triangulaire inférieure et la matrice  $B$  n'a comme élément non nul que sa première composante. Le schéma de construction implique donc que notre matrice de gain n'aura, elle aussi, comme seul élément non nul que sa première composante. En effet, lorsque nous considérons l'élément  $b_1$ , nous avons bien que  $\forall j \neq 1, b_j = 0$ ; de ce fait, nous poserons

$$k_s^1 > \frac{a_{11}}{b_1}$$

en nous arrangeant pour que  $k_s^1$  soit strictement positif. Lorsque nous considérons tout autre élément  $b_i$  de  $b$ ,  $i \neq 1$ , nous avons cette fois que  $\exists j \neq i$  tel que  $b_j \neq 0$  puisque l'élément  $b_1$  est toujours différent de zéro; nous poserons alors

$$k_s^i = \min_{j \neq i, b_j \neq 0} \left\{ \frac{a_{ji}}{b_j} \right\}.$$

Cependant, sachant que  $b_1$  est la seule composante de  $b$  à être non nulle, le seul élément respectant les conditions du minimum est  $\frac{a_{11}}{b_1}$  qui sera toujours nul puisque  $A$  est une matrice triangulaire inférieure.

Pour notre modèle de réacteur à dispersion axiale, la matrice  $A$  possède une sur-diagonale d'éléments non nuls et la matrice  $B$  n'a comme élément non nul que sa première composante. Le schéma de construction implique alors que notre matrice de gain  $k_s$  n'aura que deux éléments non nuls : sa première composante, et sa deuxième. L'idée est la même que pour le modèle de réacteur à écoulement piston. Lorsque nous considérons l'élément  $b_1$ , nous savons que toutes les autres composantes de  $b$  sont nulles et nous posons donc

$$k_s^1 > \frac{a_{11}}{b_1}$$

(en s'arrangeant à nouveau pour que  $k_s^1$  soit strictement positif). Lorsque nous considérons l'élément  $b_2$ , nous devons poser

$$k_s^2 = \min_{j \neq 2, b_j \neq 0} \left\{ \frac{a_{j2}}{b_j} \right\}.$$

Le seul élément respectant les conditions du minimum est  $\frac{a_{12}}{b_1}$  qui sera toujours non nul puisque  $A$  possède une sur-diagonale d'éléments non nuls. Enfin, lorsque nous considérons tout autre élément  $b_i$  de  $b$ ,  $i > 2$ , nous devons poser

$$k_s^i = \min_{j \neq i, b_j \neq 0} \left\{ \frac{a_{ji}}{b_j} \right\}.$$

Le seul élément respectant les conditions du minimum est  $\frac{a_{1i}}{b_1}$  qui sera toujours nul en raison de la structure de  $A$ .

## 4.4 Approche numérique

Dans cette section, nous allons analyser numériquement le comportement de notre système discrétisé via divers graphes, fonctions et algorithmes de calcul. Les tests ont été effectués au moyen d'un programme (réalisé grâce au logiciel MATLAB) dont le code se trouve en annexe.

Nous souhaitons, d'une part, étudier le comportement du système de base via les graphes des trajectoires d'état et des réponses indicielle et impulsionnelle, et d'autre part, étudier le comportement du système contrôlé, la matrice de gain étant construite selon le schéma défini par le théorème 3.1. Nous désirons également savoir si l'algorithme de construction de la matrice de gain  $k_s$  est coûteux ou non, selon que nous avons choisi une discrétisation affinée  $((n-1)\Delta z = L$  avec  $n$  grand et  $\Delta z$  petit) ou moins affinée  $((n-1)\Delta z = L$  avec  $n$  petit et  $\Delta z$  grand). La fonction MATLAB "Tic-Toc" nous permettra de vérifier le temps exact d'exécution de la routine.

Une première remarque à faire est que le système de base est déjà stable (voir [11]) et donc également stabilisable, nous n'appliquerons donc pas le résultat du théorème 2.1 dans l'optique de tester la stabilisabilité du système et de créer une matrice de gain permettant de le stabiliser, nous chercherons juste - dans un premier temps - à comparer le comportement du système de base et celui du système contrôlé. Cependant, il serait sans aucun doute intéressant d'appliquer notre algorithme à un système instable, aussi tenterons-nous - dans un second temps - de perturber notre système initial dans le but de le rendre instable, puis de le contrôler grâce à l'asservissement d'état défini par l'algorithme. Nous pourrions alors analyser le comportement du système perturbé grâce - à nouveau - aux graphes des trajectoires d'état et des réponses indicielle et impulsionnelle, et le comparer à celui du système contrôlé.

Notons bien que notre modèle comporte six paramètres potentiellement modifiables; lors de nos tests, nous souhaiterons faire varier certains d'entre eux tout en maintenant les autres fixes dans le but d'étudier les différents comportements que pourrait avoir notre système. Nous décrivons ci-dessous les différentes combinaisons que nous serons amené à tester et les paramètres que nous considérerons comme fixés à une valeur constante. Il est évident qu'il s'agit là d'un choix arbitraire : nous pourrions décider de faire varier également ces paramètres, ou de les fixer à une autre valeur constante.

Les paramètres que nous maintiendrons fixes sont

- $L$ , la longueur du réacteur, posée à 1 m ;
- $b$ , le coefficient stoechiométrique de la réaction, posé à 1 ;
- $k_0$ , la constante cinétique, posée à 1 s<sup>-1</sup>.

Les paramètres que nous ferons varier indépendamment sont

- $n$ , le nombre de points d'approximation, que nous choisirons petit (pour une approximation plus simple mais moins affinée) ou grand (pour une approximation plus complexe mais plus affinée) ;
- $v$  en parallèle avec  $D_a$ , la vitesse superficielle du fluide (en m/s) et le coefficient de dispersion axiale (en m<sup>2</sup>/s) respectivement, pour lesquels trois cas particuliers s'offrent à nous : lorsque  $v$  est petit et  $D_a$  est grand ( $vL \ll D_a$ ), lorsque  $v$  et  $D_a$  sont identiques ( $vL = D_a$ ), et lorsque  $v$  est grand et  $D_a$  est petit ( $vL \gg D_a$ ).

Nous avons également fixé (arbitrairement) l'état initial du système, que nous avons posé à

$$x_0 = [\underbrace{55}_{=x_0^1} \ 0 \cdots 0 \ \underbrace{55}_{=x_0^{n+1}} \ 0 \cdots 0]^T \in \mathbb{R}^{2n}$$

où tous les éléments sont nuls sauf les composantes  $x_0^1$  et  $x_0^{n+1}$ , qui correspondent respectivement aux concentrations de réactif et de produit  $x_1(z_1)$  et  $x_2(z_1)$  initiales, et qui valent 55 mol/l.

#### 4.4.1 Etude des systèmes de base et contrôlé

Dans cette sous-section, nous allons brièvement analyser le comportement du système de base via les graphes des réponses indicielle et impulsionnelle, et comparer les graphes des trajectoires d'état des systèmes de base et contrôlé.

##### \* Modèle de réacteur à écoulement piston

Pour ce premier modèle de réacteur, nous savons que le coefficient de dispersion axiale est nul, i.e.  $D_a = 0$ . Nous ne ferons donc varier que les paramètres  $v$  et  $n$  lors de nos tests numériques.

Analysons tout d'abord les graphes subséquents ; ils représentent les réponses indicielles du système de base pour certaines valeurs des paramètres variables. Rappelons que la réponse indicielle d'un système est la sortie de ce système à l'état nul lorsque l'entrée est un échelon unitaire discret.



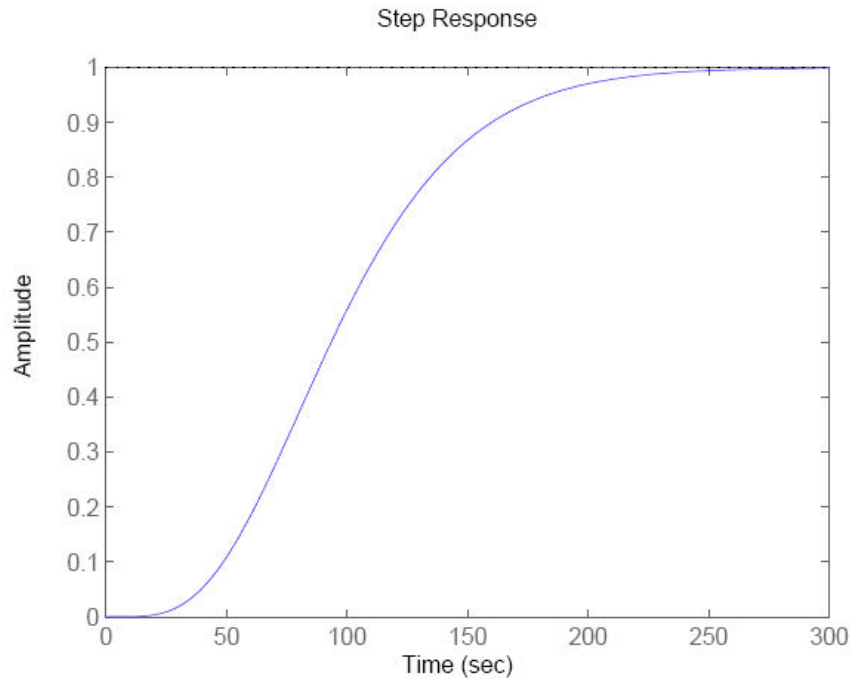


FIGURE 4.1 – Réponse indicielle du système de base :  $D_a = 0$ ,  $v = 0,01$  et  $n = 5$

Remarquons que le graphe de sortie (i.e. la concentration de produit à la sortie du réacteur) tend vers 1, ce qui semble assez logique à partir du moment où le coefficient stoechiométrique de la réaction vaut 1, que le coefficient de dispersion axiale est nul et que la vitesse superficielle du fluide est assez faible que pour permettre la transformation complète du réactif en produit à l'intérieur du réacteur. Il faudra cependant un certain temps (environ cinq minutes) pour atteindre un tel résultat, ceci étant du - justement - à la faible vitesse du fluide.

Nous souhaitons maintenant observer ce qui se passe lorsque la vitesse superficielle du fluide est grandement augmentée (nous posons  $v = 1$  à la place de  $v = 0,01$ , et les paramètres  $D_a$  et  $n$  restent inchangés par rapport au cas précédent).

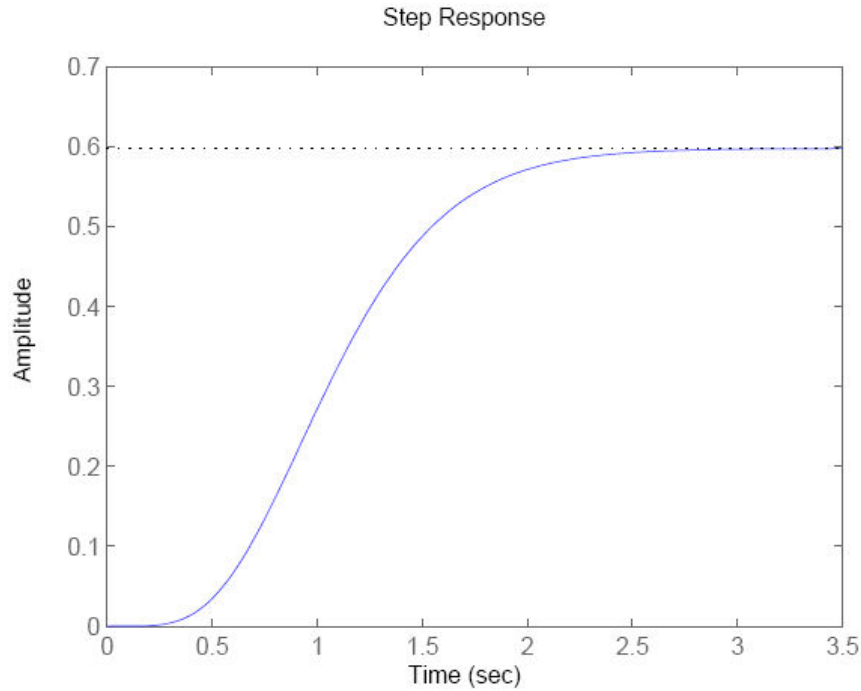


FIGURE 4.2 – Réponse indicielle du système de base :  $D_a = 0$ ,  $v = 1$  et  $n = 5$

La concentration de produit à la sortie du réacteur convergera cette fois beaucoup plus vite (en environ 3 secondes), mais la réaction sera incomplète, comme le témoigne la valeur de convergence. En effet, le fluide parcourt tout le réacteur en seulement une seconde et ne laisse donc pas le temps pour une transformation complète.

Finalement, nous allons étudier les changements potentiels lorsque la discrétisation est plus affinée (le nombre de pas de discrétisation passe de  $n = 5$  à  $n = 50$ , et les paramètres  $D_a$  et  $v$  restent inchangés par rapport au cas précédent).

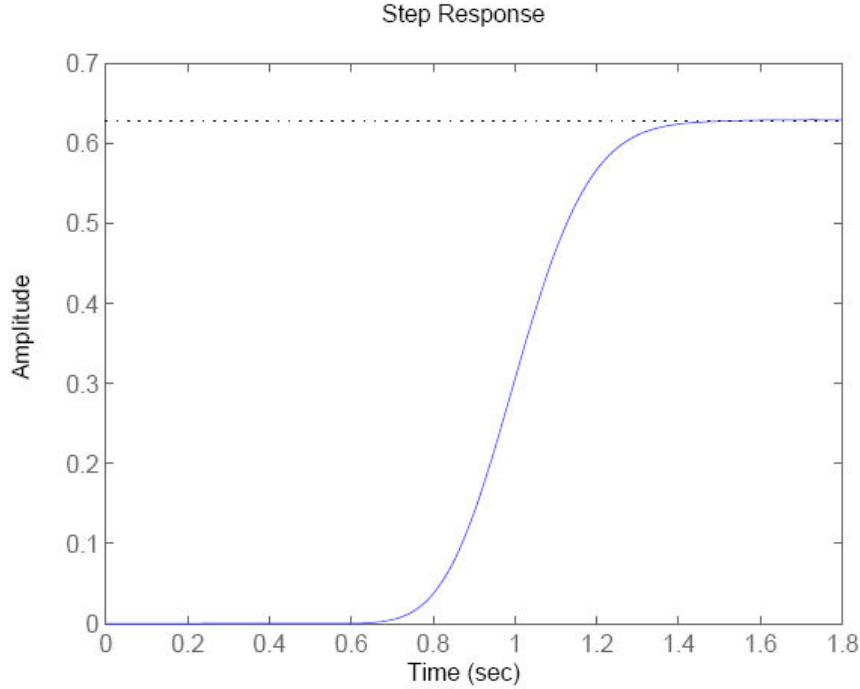


FIGURE 4.3 – Réponse indicielle du système de base :  $D_a = 0$ ,  $v = 1$  et  $n = 50$

Nous remarquons deux différences importantes. Tout d'abord, la valeur de convergence n'est pas exactement la même (0,6 pour le cas précédent,  $>0,6$  pour ce cas-ci). Ensuite, le temps nécessaire à la stabilisation du système est réduit de moitié par rapport au cas précédent. Nous pouvons en déduire qu'une discrétisation moins affinée entraîne une perte de précision non négligeable dans nos résultats (tout en apportant cependant un gain de temps et de simplicité considérable pour nos calculs).

Penchons-nous maintenant sur les graphes suivants ; ils représentent cette fois les réponses impulsionnelles du système de base pour certaines valeurs des paramètres variables. Pour rappel, la réponse impulsionnelle d'un système est la sortie de ce système à l'état nul lorsque l'entrée est une impulsion de Dirac.

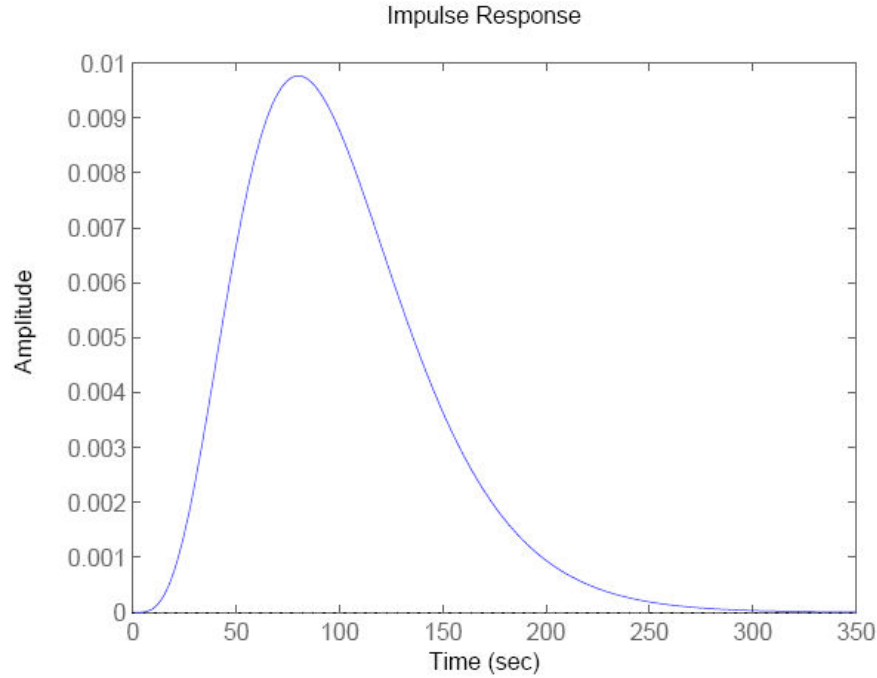


FIGURE 4.4 – Réponse impulsionnelle du système de base :  $D_a = 0$ ,  $v = 0.01$  et  $n = 5$

A partir du moment où l'entrée est une impulsion, il semble logique que nous obtenions un tel type de graphe. La faible vitesse du fluide implique à nouveau un temps important pour la convergence de la concentration de produit à la sortie du réacteur vers une valeur fixe.

Comme pour notre étude des réponses indicielles, nous souhaitons maintenant observer ce qui se passe lorsque la vitesse superficielle du fluide est grandement augmentée (les paramètres  $D_a$  et  $n$  restent inchangés par rapport au cas précédent).

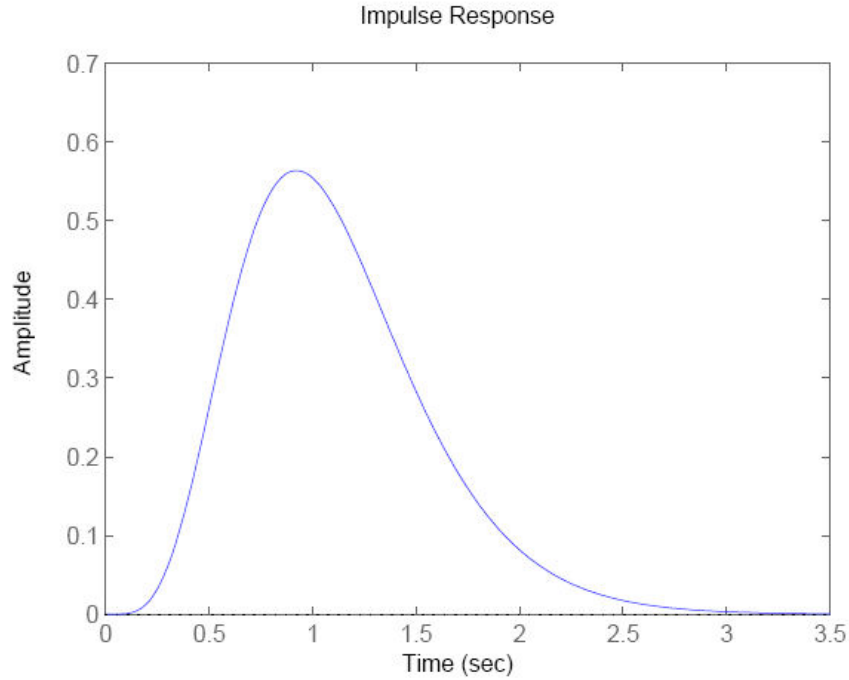


FIGURE 4.5 – Réponse impulsionnelle du système de base :  $D_a = 0$ ,  $v = 1$  et  $n = 5$

Nous remarquons cette fois que la sortie de produit se déroule sur un temps beaucoup plus court, et que la quantité de produit est également plus élevée, la vitesse élevée du réactif compensant le caractère impulsionnel de l'entrée.

Finalement, nous cherchons - une fois encore - à déterminer les changements potentiels lorsque la discrétisation est plus affinée (les paramètres  $D_a$  et  $v$  restent inchangés par rapport au cas précédent).

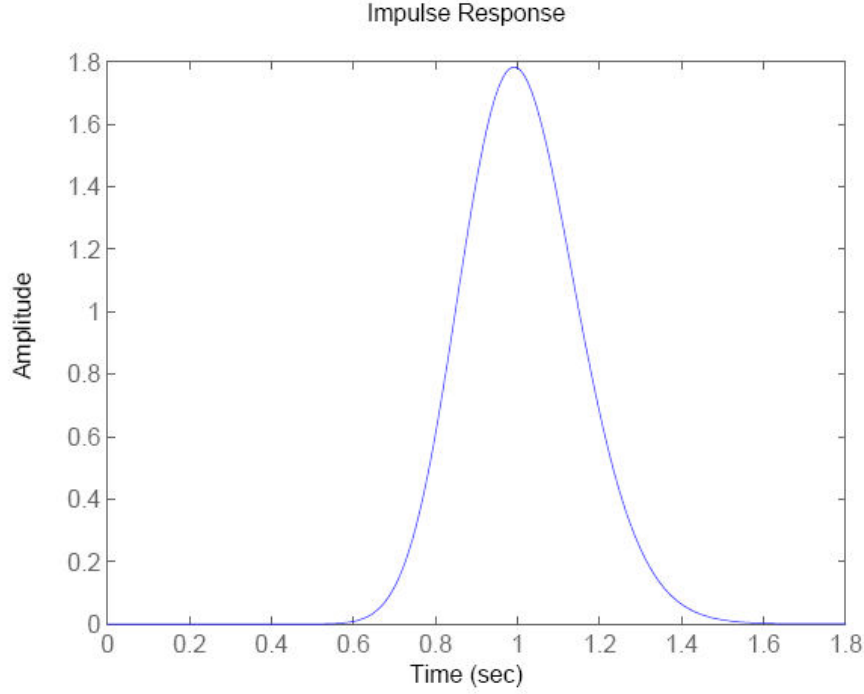


FIGURE 4.6 – Réponse impulsionnelle du système de base :  $D_a = 0$ ,  $v = 1$  et  $n = 50$

Nous remarquons que le temps de réaction est différent, mais également la valeur de la sortie. La conclusion est la même que précédemment : une discrétisation moins affinée entraîne une perte de précision importante dans nos résultats.

Nous allons maintenant nous intéresser aux trajectoires d'état du système de base et du système contrôlé. Etudions les différents comportements possibles en fonction des valeurs des paramètres  $v$  et  $n$ .

Lorsque  $D_a = 0$ ,  $v = 0,01$  et  $n = 5$ , nous obtenons les résultats suivants :

- l'algorithme s'exécute en 0,038571 secondes et nous fournit la matrice de gain

$$k_s = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \in \mathbb{R}^{1 \times 10};$$

- les trajectoires d'état des systèmes et le graphe d'entrée sont fournis ci-dessous :

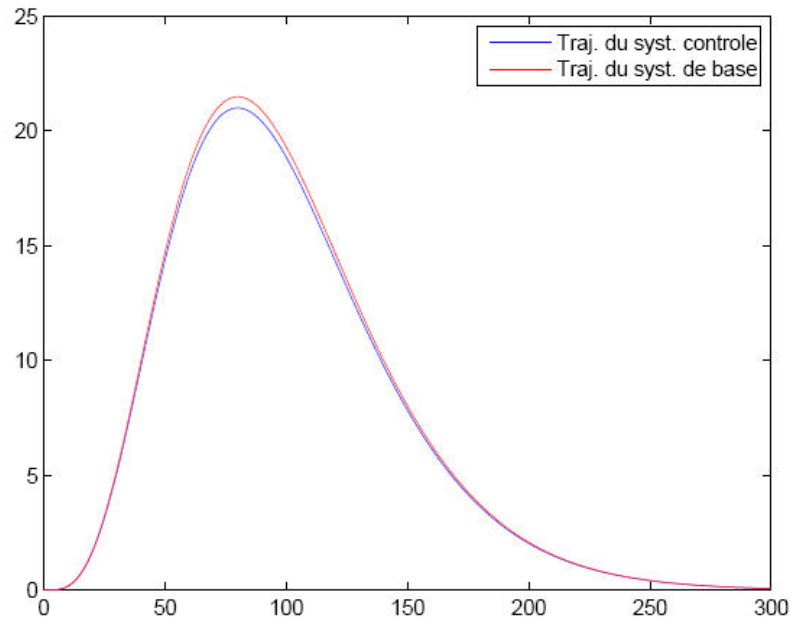


FIGURE 4.7 – Trajectoires d'état :  $D_a = 0$ ,  $v = 0,01$  et  $n = 5$

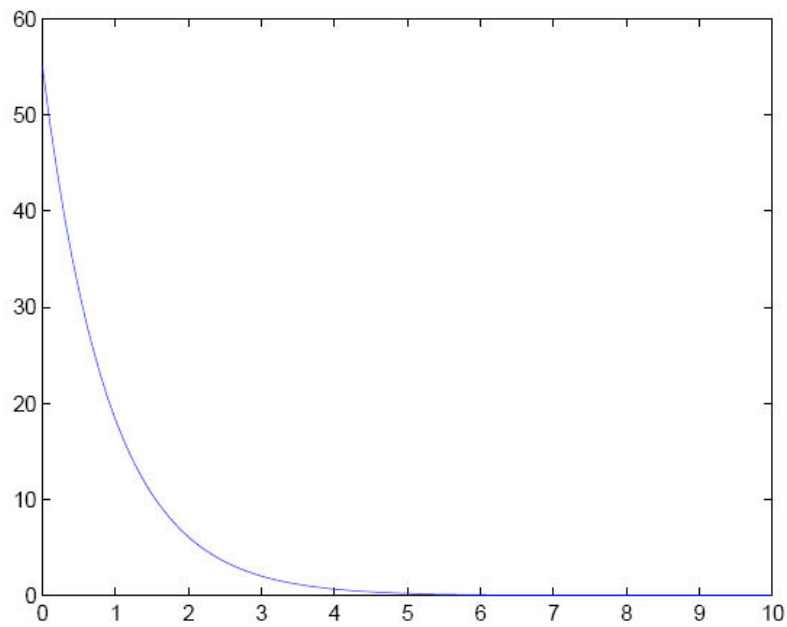


FIGURE 4.8 – Graphe d'entrée du système contrôlé :  $D_a = 0$ ,  $v = 0,01$  et  $n = 5$

Pour de tels paramètres, les trajectoires d'état du système contrôlé sont fort proches de celles du système de base. Le processus de stabilisation est long, et l'entrée définie par l'asservissement d'état décroît lentement.

Lorsque  $D_a = 0$ ,  $v = 1$  et  $n = 5$ , nous obtenons les résultats suivants :

- l'algorithme s'exécute en 0,008047 secondes et nous fournit la matrice de gain

$$k_s = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \in \mathbb{R}^{1 \times 10};$$

- les trajectoires d'état des systèmes et le graphe d'entrée sont fournis ci-dessous :

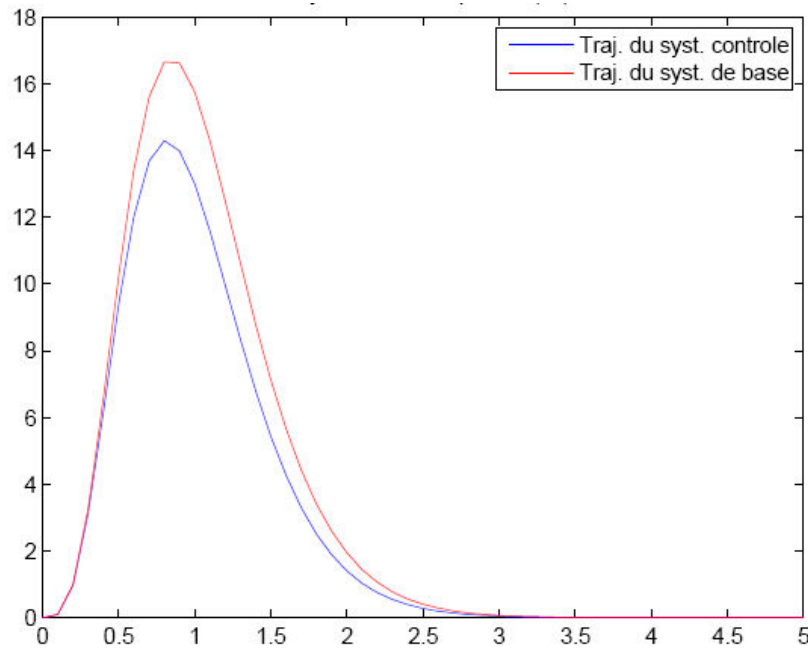


FIGURE 4.9 – Trajectoires d'état :  $D_a = 0$ ,  $v = 1$  et  $n = 5$



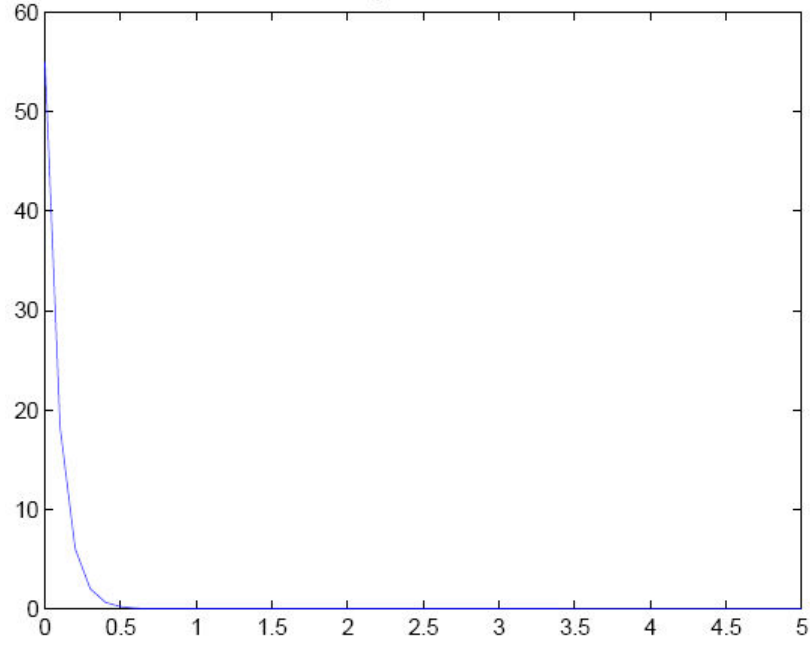


FIGURE 4.10 – Graphe d'entrée du système contrôlé :  $D_a = 0$ ,  $v = 1$  et  $n = 5$

Nous remarquons cette fois que les trajectoires d'état du système contrôlé semblent converger plus vite que celles du système de base. Le processus de stabilisation est plus rapide, et l'entrée définie par l'asservissement d'état décroît plus vite.

Lorsque  $D_a = 0$ ,  $v = 0,01$  et  $n = 100$ , nous obtenons les résultats suivants :

- l'algorithme s'exécute en 0,018729 secondes et nous fournit la matrice de gain

$$k_s = [1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0] \in \mathbb{R}^{1 \times 200};$$

- les trajectoires d'état des systèmes et le graphe d'entrée sont fournis ci-dessous :

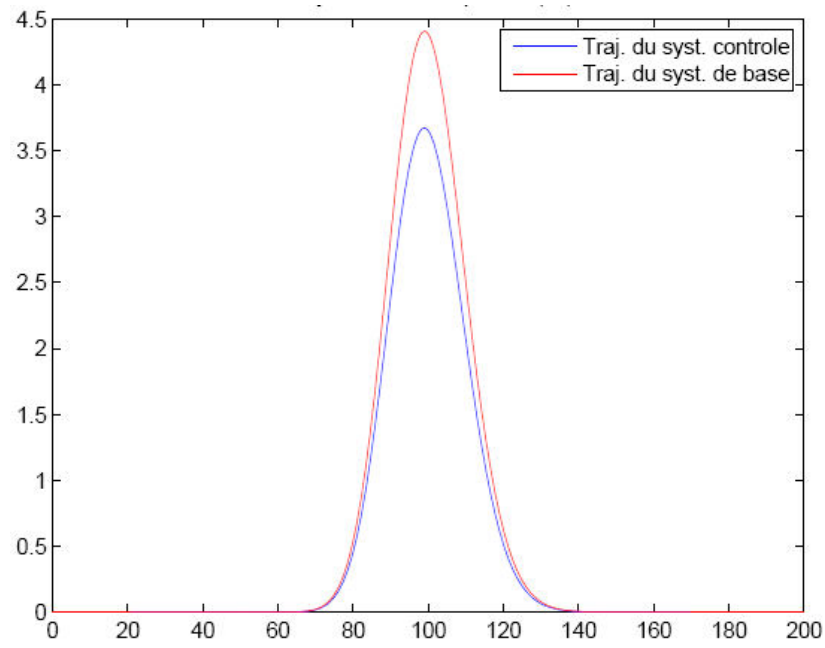


FIGURE 4.11 – Trajectoires d'état :  $D_a = 0$ ,  $v = 0,01$  et  $n = 100$

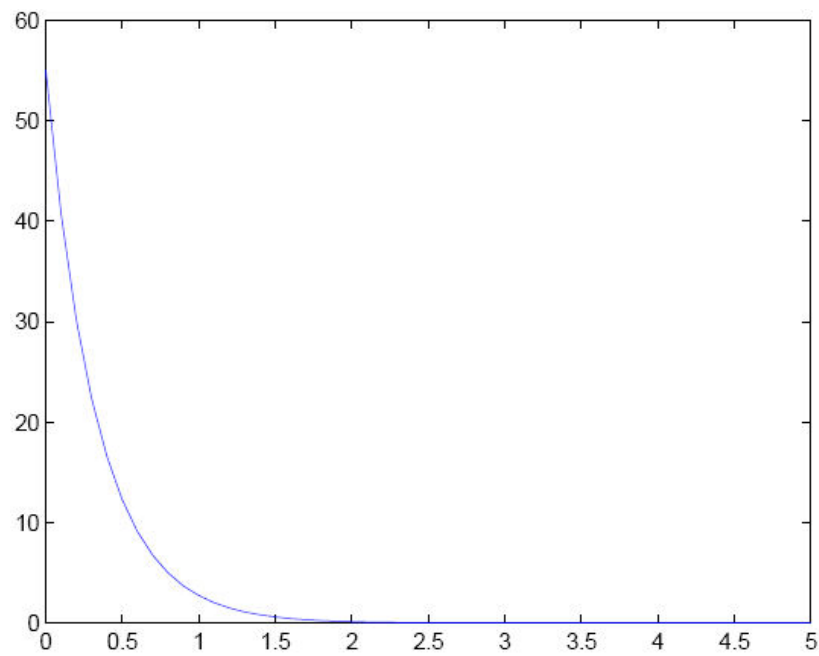


FIGURE 4.12 – Graphe d'entrée du système contrôlé :  $D_a = 0$ ,  $v = 0,01$  et  $n = 100$

Nous notons quelques différences entre ce modèle et le premier étudié (pour lequel  $D_a = 0$ ,  $v = 0,01$  et  $n = 5$ ) lorsque nous augmentons le nombre de points de discrétisation : l'entrée semble décroître plus vite, les trajectoires d'état du système contrôlé convergent cette fois plus rapidement que celles du système de base, et le temps de sortie du produit est plus court.

Lorsque  $D_a = 0$ ,  $v = 1$  et  $n = 100$ , nous obtenons les résultats suivants :

- l'algorithme s'exécute en 0,061107 secondes et nous fournit la matrice de gain

$$k_s = [1 \quad 0 \quad \dots \quad 0] \in \mathbb{R}^{1 \times 200};$$

- les trajectoires d'état des systèmes et le graphe d'entrée sont fournis ci-dessous :

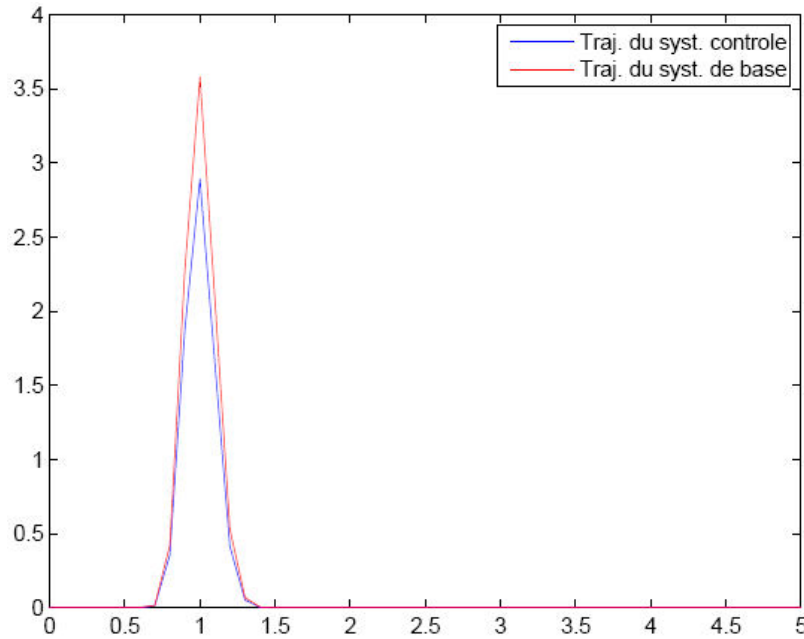


FIGURE 4.13 – Trajectoires d'état :  $D_a = 0$ ,  $v = 1$  et  $n = 100$

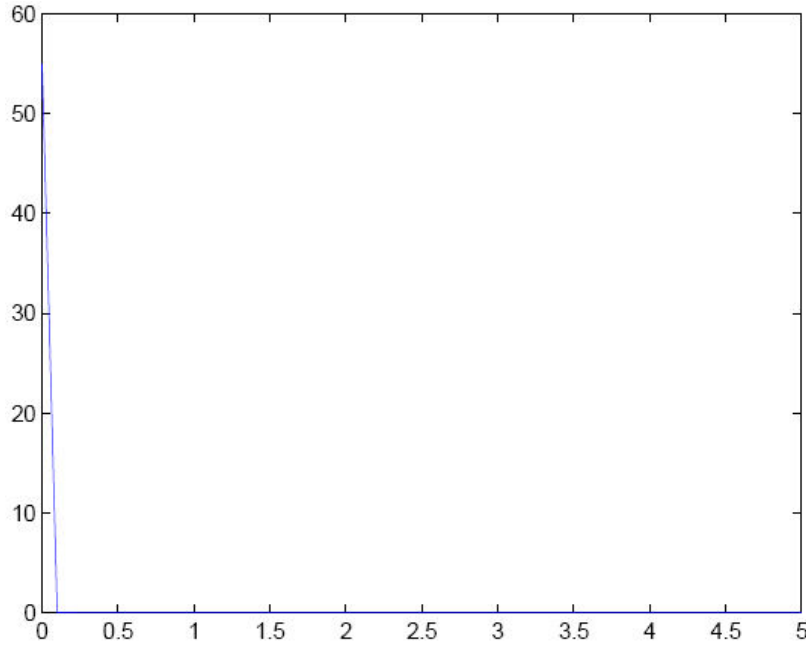


FIGURE 4.14 – Graphe d’entrée du système contrôlé :  $D_a = 0$ ,  $v = 1$  et  $n = 100$

Une fois encore nous remarquons que, par rapport au même modèle en discrétisation peu affinée ( $D_a = 0$ ,  $v = 1$  et  $n = 5$ ), l’entrée décroît plus rapidement, la stabilisation du système contrôlé est globalement plus rapide que celle du système de base, et le temps d’évacuation du produit est plus court.

Pour chacun de ces cas particuliers, nous avons choisi d’étudier comme équilibre l’équilibre nul, i.e. lorsque l’entrée et l’état sont nuls. Cela revient à vouloir couper le réacteur de manière optimale : nous souhaitons ne plus avoir de réactif entrant dans le réacteur, ne plus avoir de réactif et de produit à l’intérieur du réacteur, et ne plus avoir de produit à la sortie du réacteur.

Il est évident que nous aurions pu étudier un autre équilibre, différent de l’équilibre nul. Pour cela, il suffit d’écrire

$$\dot{x} = A^d x_e + B^d u_e = 0$$

où  $x_e$  est un état d’équilibre non nul et  $u_e$  est une entrée d’équilibre non nulle.

Deux possibilités s'offrent alors à nous :

- soit nous fixons notre entrée  $u = \bar{u}$  et nous calculons notre état d'équilibre  $x_e$  en fonction de cela ( $\bar{u}$  est alors une constante dans notre système d'équations  $\dot{x} = 0$  que nous aurons donc à résoudre pour trouver la valeur de  $x_e$ ) ;
- soit nous fixons notre état  $x = \bar{x}$  et nous calculons l'entrée requise pour atteindre cet état souhaité ( $\bar{x}$  est alors un vecteur constant dans notre système d'équations  $\dot{x} = 0$ , et  $u_e$  dépendra directement de  $\bar{x}_1(z_1)$ ).

**Remarque 4.2.** *Si nous souhaitons fixer notre état et calculer l'entrée requise, il est important de noter que tout état n'est pas forcément atteignable et qu'il faudra donc choisir un état valide si nous voulons en déduire l'entrée qui s'y rapporte.*

Le graphe suivant représente la trajectoire d'état du système de base lorsque nous avons fixé notre entrée  $u = 55$ , avec les paramètres  $D_a = 0$ ,  $v = 1$  et  $n = 100$  :

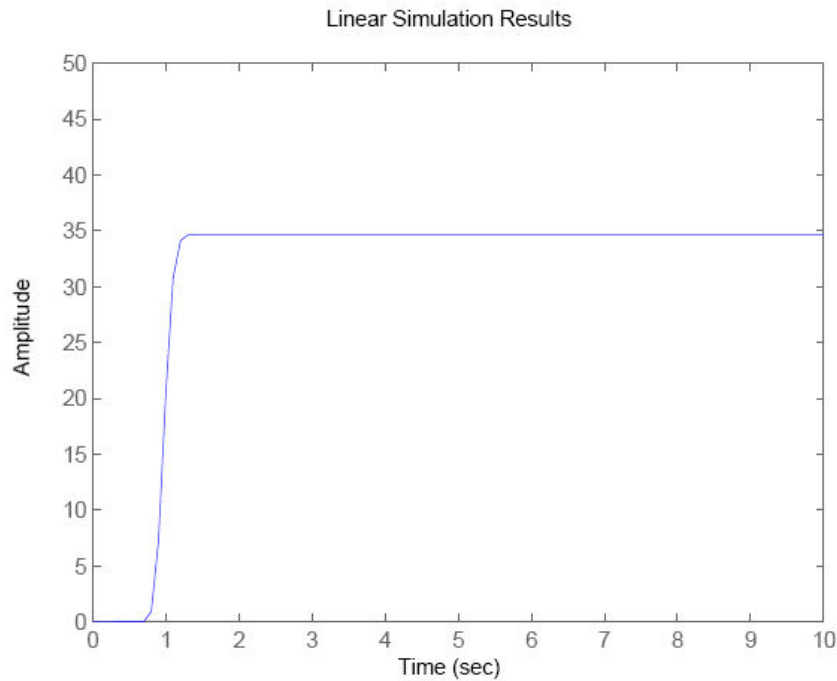


FIGURE 4.15 – Trajectoire d'état du système de base à entrée constante  $u = 55$  :  $D_a = 0$ ,  $v = 1$  et  $n = 100$

Nous remarquons donc qu'en fixant l'entrée à une valeur constante arbitraire, la concentration de produit à la sortie du réacteur convergera vers un équilibre (le processus est similaire à la réponse indicielle). Dans ce cas précis, il faudra un peu plus d'une seconde au système pour se stabiliser, sachant que le réactif met une seconde pour parcourir l'entièreté du réacteur.

### \* Modèle de réacteur à dispersion axiale

Pour ce second modèle de réacteur, nous savons que le coefficient de dispersion axiale est strictement positif, i.e.  $D_a > 0$ . Nous pourrions donc cette fois faire varier le paramètre  $D_a$  en plus des paramètres  $v$  et  $n$  lors de nos tests numériques.

Les graphes subséquents représentent les réponses indicielles du système de base pour certaines valeurs des paramètres variables. Le comportement du système est globalement le même que pour le modèle de réacteur à écoulement piston, aussi ne nous attarderons-nous pas sur cette phase de l'analyse.

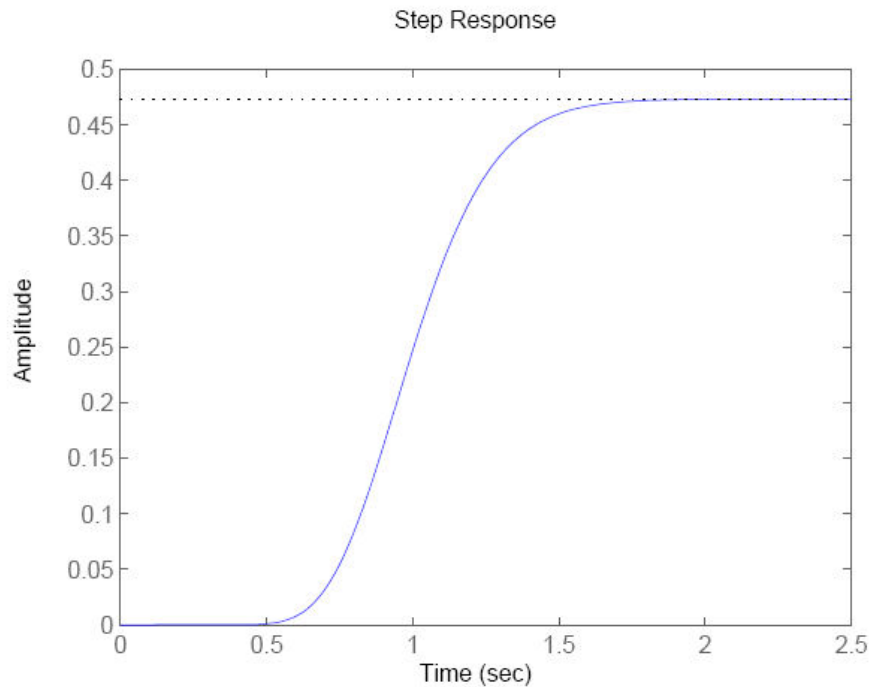


FIGURE 4.16 – Réponse indicielle du système de base :  $D_a = 0,01$ ,  $v = 1$  et  $n = 30$

En intégrant un faible coefficient de dispersion axiale, il semble que nous conservions le même comportement que celui étudié précédemment. Nous notons toutefois une certaine baisse de la concentration de produit à la sortie du réacteur.

Observons maintenant ce qui se passe lorsque la vitesse superficielle du fluide est diminuée et le coefficient de dispersion axiale, augmenté (le nombre de points de discrétisation  $n$  reste inchangé par rapport au cas précédent).

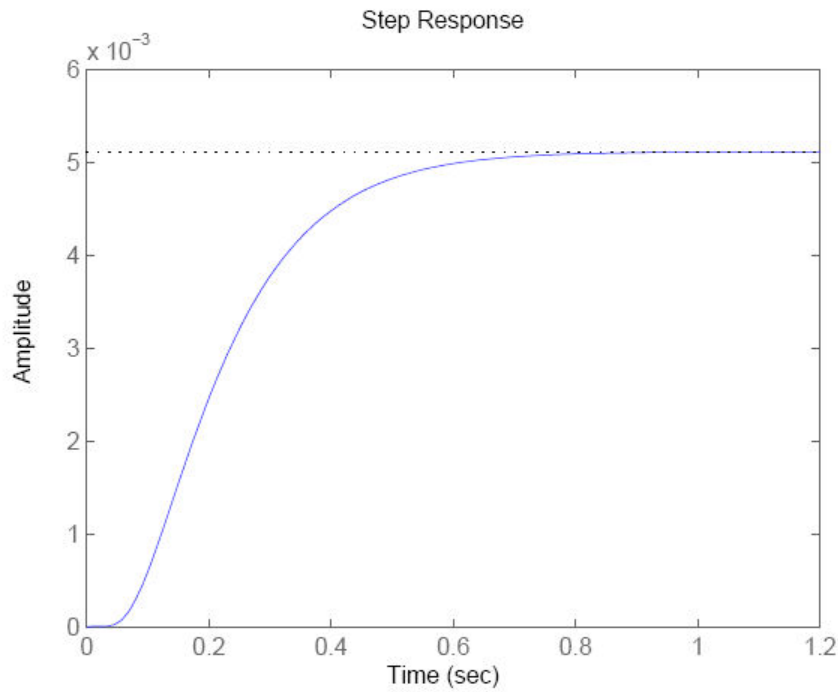


FIGURE 4.17 – Réponse indicielle du système de base :  $D_a = 1$ ,  $v = 0,01$  et  $n = 30$

Suite à l'augmentation notable du coefficient de dispersion axiale, la concentration de produit à la sortie du réacteur a chuté jusqu'à une valeur d'environ  $5 \cdot 10^{-3}$  mol/l. Cette quantité est très faible par rapport à celles obtenues dans les cas précédents, mais s'explique aisément par le fait que  $D_a$  vaille  $1 \text{ m}^2/\text{s}$ .

Intéressons-nous maintenant aux graphes des réponses impulsionnelles du système de base pour certaines valeurs des paramètres variables.

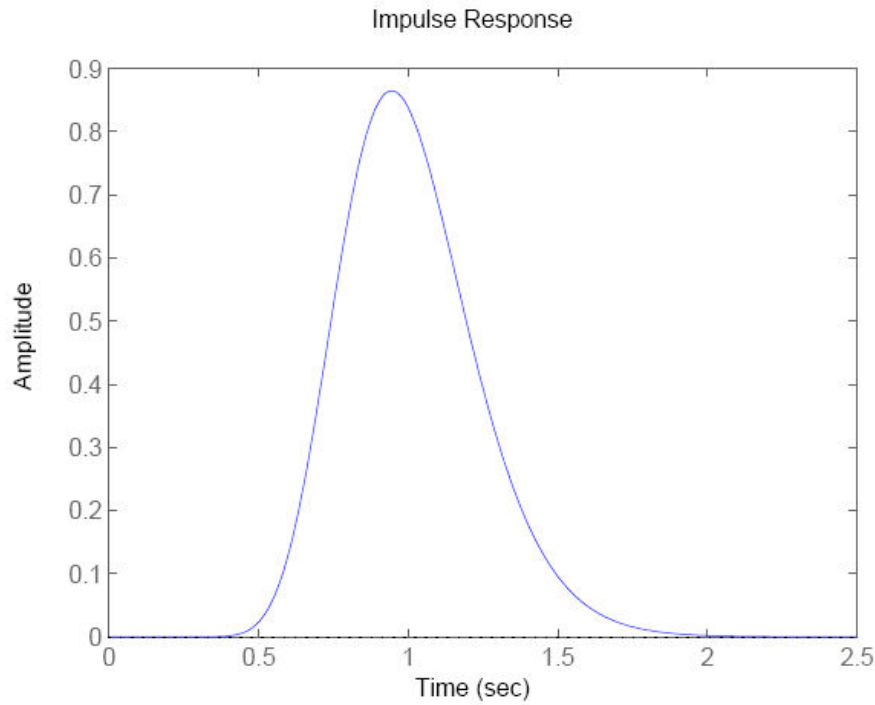


FIGURE 4.18 – Réponse impulsionnelle du système de base :  $D_a = 0,01$ ,  $v = 1$  et  $n = 30$

Nous obtenons un pic après environ une seconde, ce qui n'est en rien une surprise puisque nous savons que la vitesse superficielle du fluide est de 1 m/s. Une fois encore, nous notons une diminution de la concentration de produit à la sortie du réacteur.

Comme nous l'avons fait pour notre étude des réponses indicielles, nous allons maintenant observer ce qui se passe lorsque la vitesse superficielle du fluide est diminuée et le coefficient de dispersion axiale, augmenté (nous conservons le même nombre de points de discrétisation).



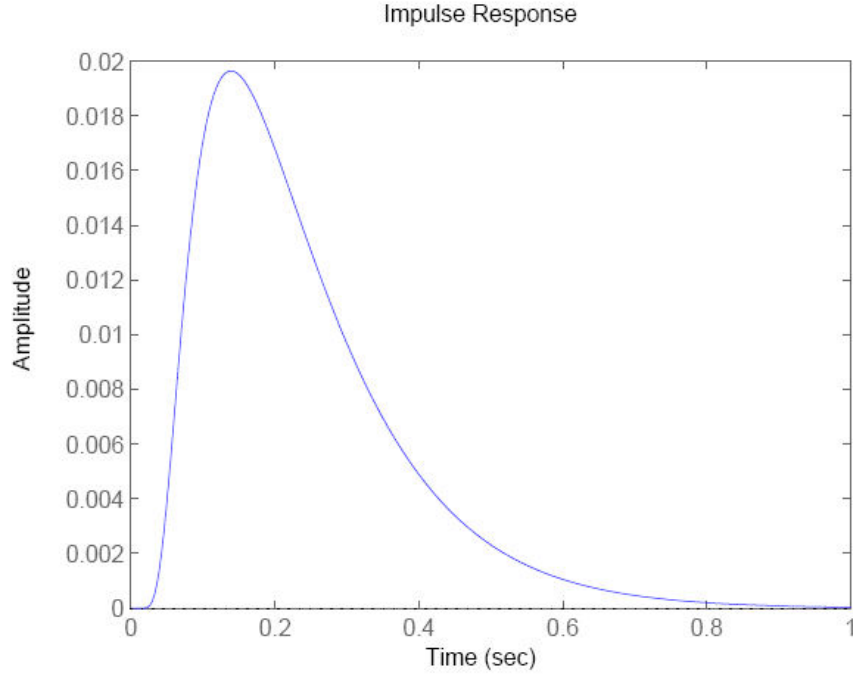


FIGURE 4.19 – Réponse impulsionnelle du système de base :  $D_a = 1$ ,  $v = 0,01$  et  $n = 30$

Nous observons un pic assez rapide (environ 0,15 secondes) qui mettra - proportionnellement - un certain temps avant de se stabiliser à zéro (environ 1 seconde). La valeur maximale atteinte par ce pic demeure une nouvelle fois assez faible (moins de 0,02 mol/l).

Nous souhaitons maintenant étudier les trajectoires d'état du système de base et du système contrôlé. Etudions les différents comportements possibles en fonction des valeurs des paramètres  $D_a$ ,  $v$  et  $n$ .

Lorsque  $D_a = 0,01$ ,  $v = 1$  et  $n = 5$ , nous obtenons les résultats suivants :

- l'algorithme s'exécute en 0,007276 secondes et nous fournit la matrice de gain

$$k_s = [1 \quad 0,0476 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \in \mathbb{R}^{1 \times 10};$$

- les trajectoires d'état des systèmes et le graphe d'entrée sont fournis ci-dessous :

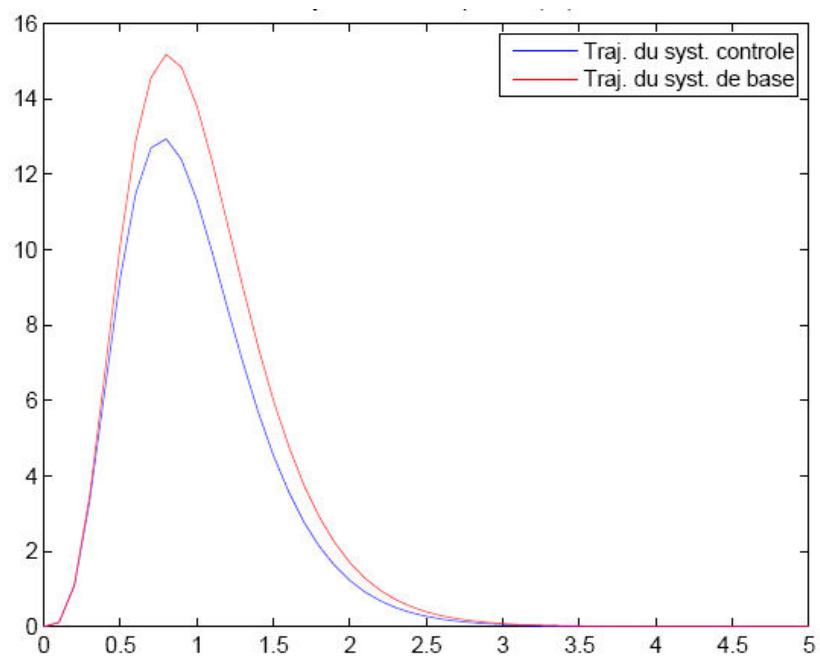


FIGURE 4.20 – Trajectoires d'état :  $D_a = 0,01$ ,  $v = 1$  et  $n = 5$

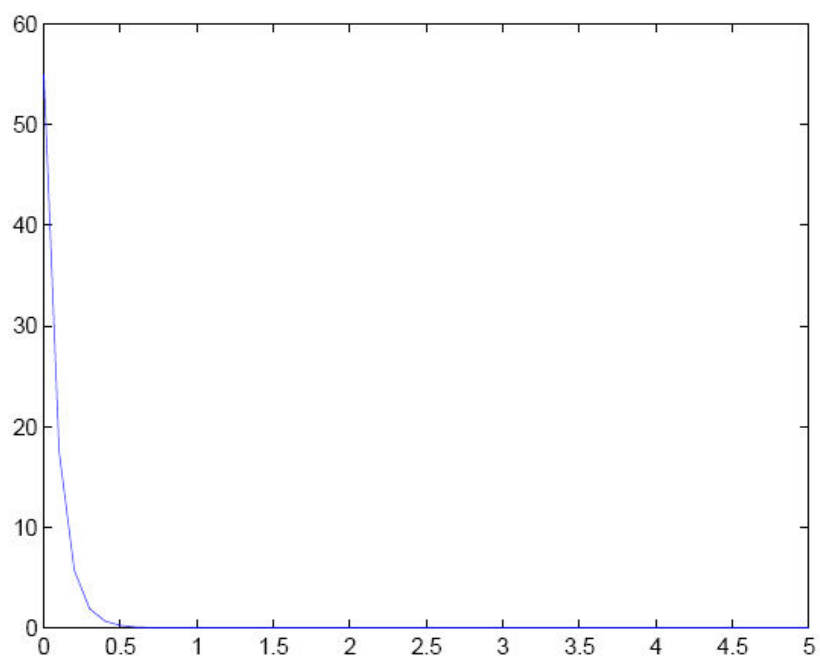


FIGURE 4.21 – Graphe d'entrée du système contrôlé :  $D_a = 0,01$ ,  $v = 1$  et  $n = 5$

Le système contrôlé semble se stabiliser plus rapidement que le système de base, son graphe de trajectoire d'état demeurant en-dessous de l'autre. L'entrée, quant à elle, décroît de manière plus ou moins rapide (un peu plus d'une demi-seconde pour passer de 55 mol/l à 0 mol/l).

Lorsque  $D_a = 0,1$ ,  $v = 0,1$  et  $n = 5$ , nous obtenons les résultats suivants :

- l'algorithme s'exécute en 0,006970 secondes et nous fournit la matrice de gain

$$k_s = [1 \quad 0,8333 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \in \mathbb{R}^{1 \times 10};$$

- les trajectoires d'état des systèmes et le graphe d'entrée sont fournis ci-dessous :

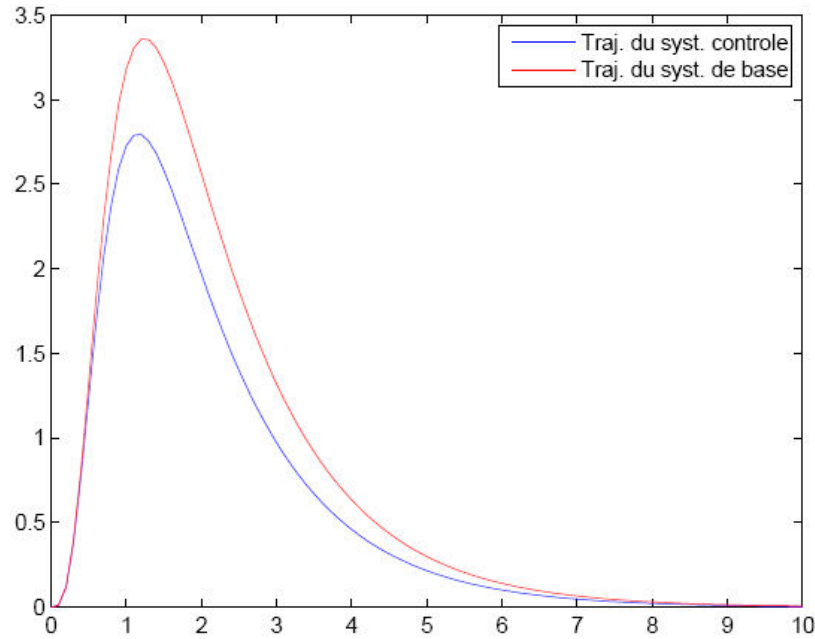


FIGURE 4.22 – Trajectoires d'état :  $D_a = 0,1$ ,  $v = 0,1$  et  $n = 5$

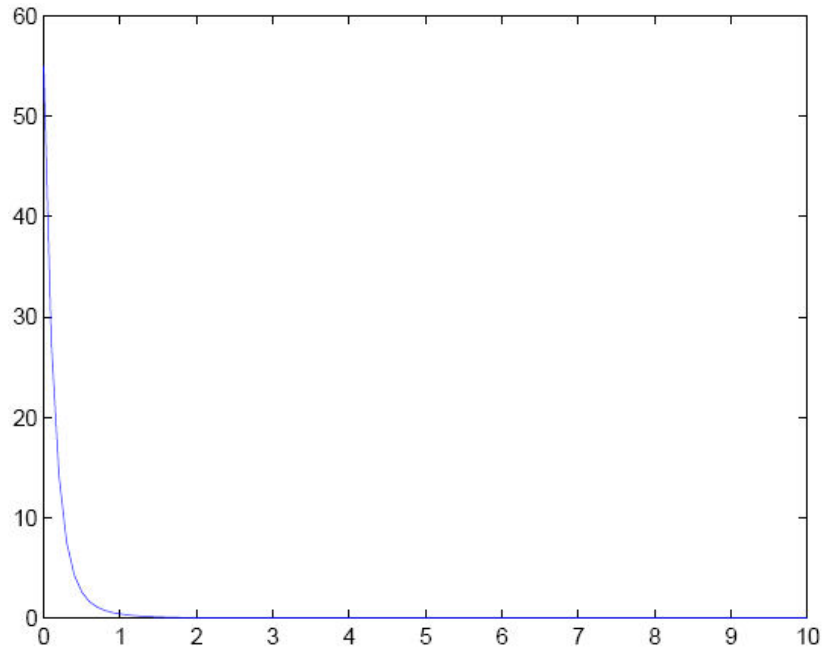


FIGURE 4.23 – Graphe d'entrée du système contrôlé :  $D_a = 0,1$ ,  $v = 0,1$  et  $n = 5$

Le comportement du système est semblable à celui du cas précédent, à ceci près que le système semble se stabiliser moins vite (l'entrée met deux fois plus de temps à s'annuler numériquement) et que la concentration de produit à la sortie du réacteur est fortement réduite.

Lorsque  $D_a = 1$ ,  $v = 0,01$  et  $n = 5$ , nous obtenons les résultats suivants :

- l'algorithme s'exécute en 0,007003 secondes et nous fournit la matrice de gain

$$k_s = [1 \quad 0,9980 \quad 0 \quad \dots \quad 0] \in \mathbb{R}^{1 \times 200};$$

- les trajectoires d'état des systèmes et le graphe d'entrée sont fournis ci-dessous :

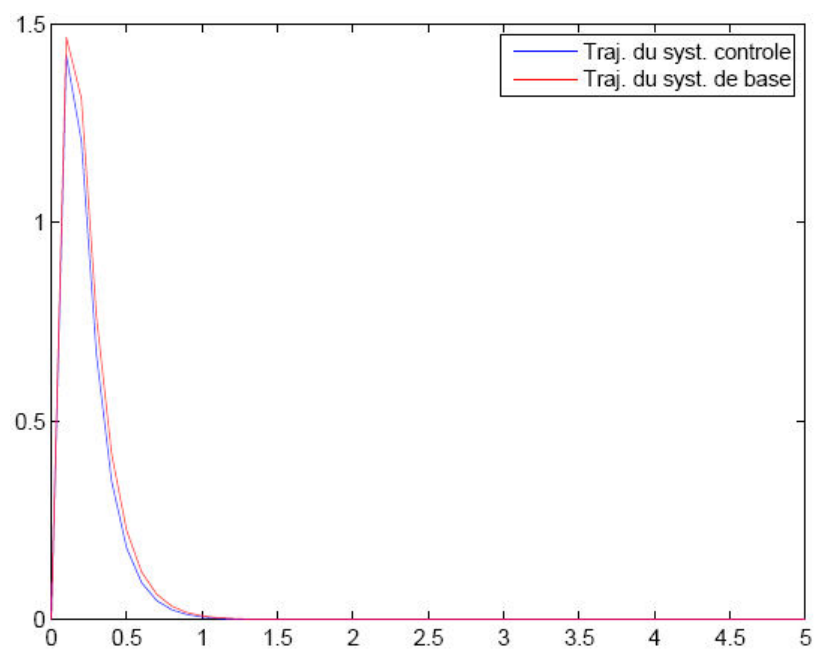


FIGURE 4.24 – Trajectoires d'état :  $D_a = 1$ ,  $v = 0,01$  et  $n = 5$

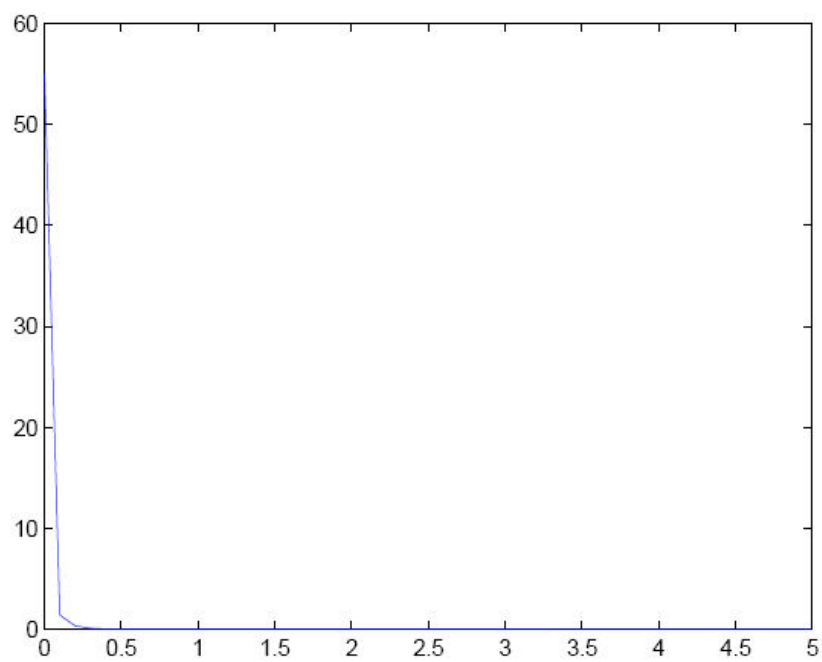


FIGURE 4.25 – Graphe d'entrée du système contrôlé :  $D_a = 1$ ,  $v = 0,01$  et  $n = 5$

La stabilisation des systèmes se fait cette fois beaucoup plus rapidement ; la valeur d'entrée approche zéro (s'annule éventuellement) en environ un quart de seconde. Remarquons que, dans ce cas précis, le système contrôlé ne se stabilise qu'à peine plus vite que le système de base.

Lorsque  $D_a = 0,01$ ,  $v = 1$  et  $n = 100$ , nous obtenons les résultats suivants :

- l'algorithme s'exécute en 0,079149 secondes et nous fournit la matrice de gain

$$k_s = [1 \quad 0,5 \quad 0 \quad \dots \quad 0] \in \mathbb{R}^{1 \times 200};$$

- les trajectoires d'état des systèmes et le graphe d'entrée sont fournis ci-dessous :

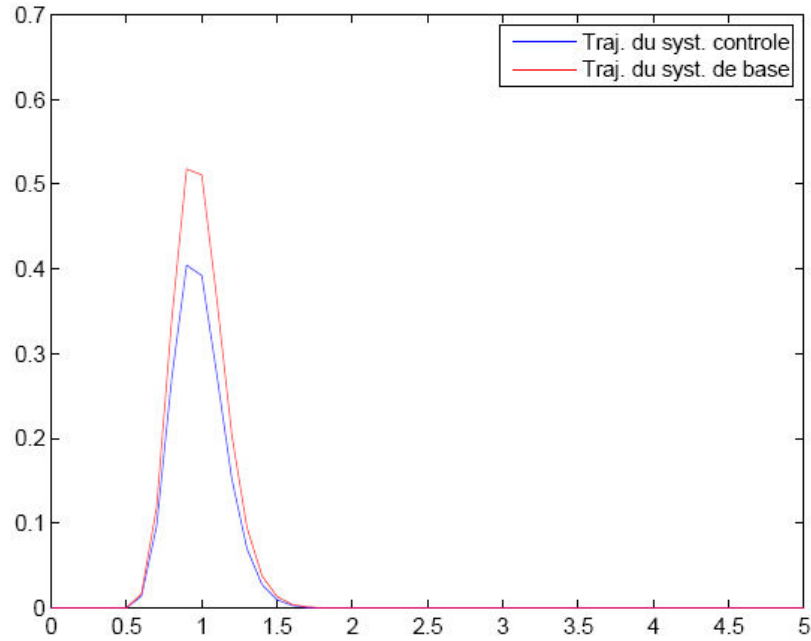


FIGURE 4.26 – Trajectoires d'état :  $D_a = 0,01$ ,  $v = 1$  et  $n = 100$

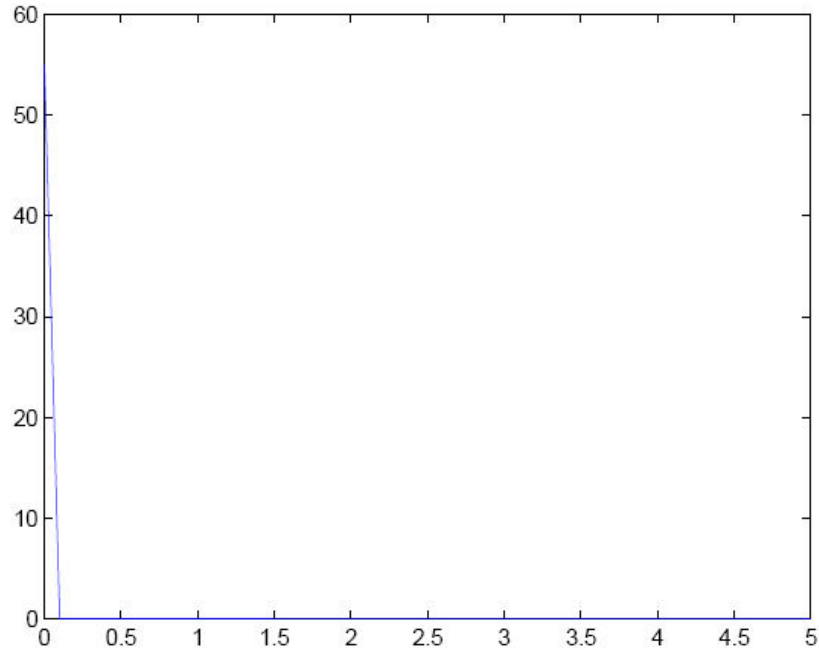


FIGURE 4.27 – Graphe d’entrée du système contrôlé :  $D_a = 0,01$ ,  $v = 1$  et  $n = 100$

Ces graphes dénotent une stabilisation beaucoup plus rapide que celle donnée par le même modèle en discrétisation peu affinée. La concentration de produit à la sortie du réacteur est plus faible, l’intervalle de temps sur lequel s’effectue la sortie de produit est réduit à environ une seconde, et la valeur de l’entrée approche zéro en à peine un dixième de seconde.

Lorsque  $D_a = 0,1$ ,  $v = 0,1$  et  $n = 100$ , nous obtenons les résultats suivants :

- l’algorithme s’exécute en 0,070907 secondes et nous fournit la matrice de gain

$$k_s = [1 \quad 0,9901 \quad 0 \quad \dots \quad 0] \in \mathbb{R}^{1 \times 200};$$

- les trajectoires d’état des systèmes et le graphe d’entrée sont fournis ci-dessous :

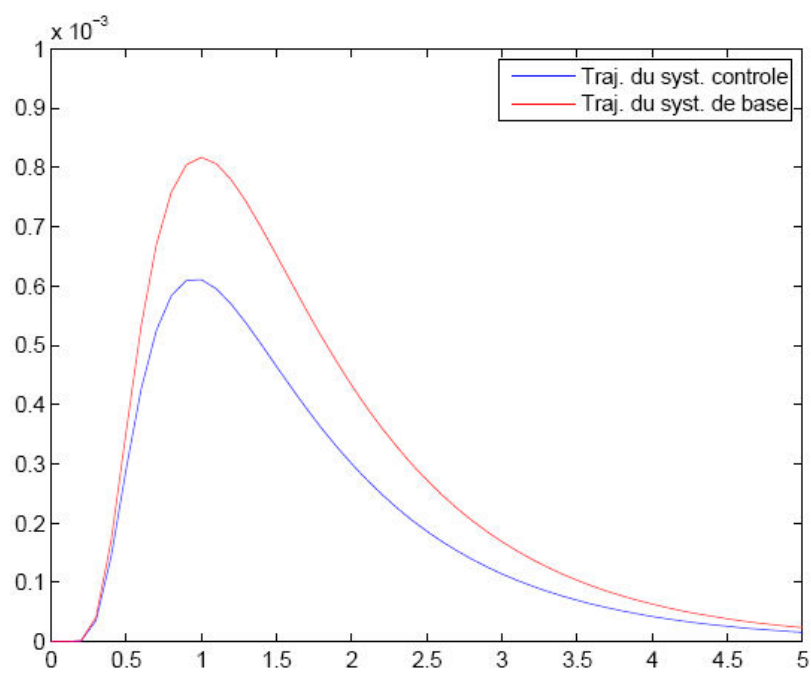


FIGURE 4.28 – Trajectoires d'état :  $D_a = 0, 1$ ,  $v = 0, 1$  et  $n = 100$

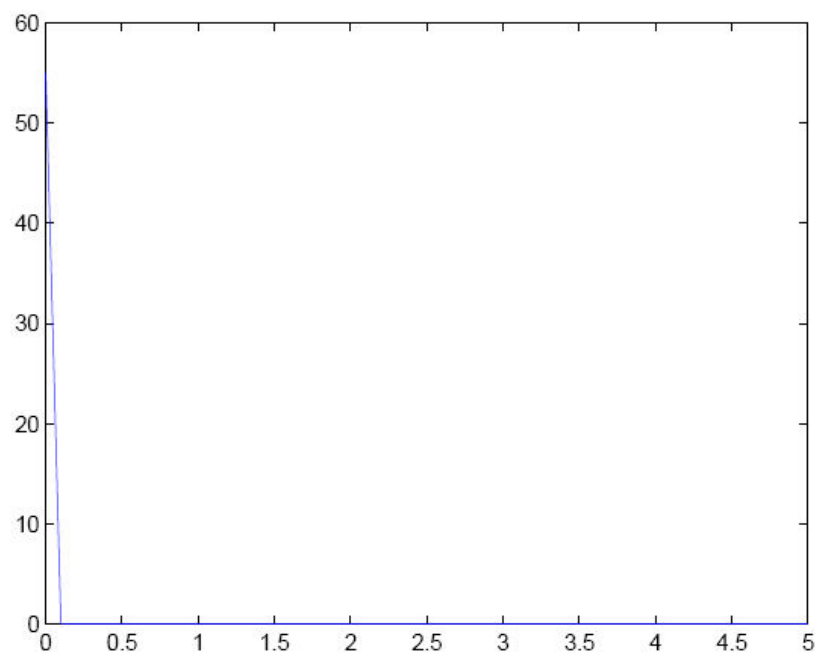


FIGURE 4.29 – Graphe d'entrée du système contrôlé :  $D_a = 0, 1$ ,  $v = 0, 1$  et  $n = 100$



Les graphes des trajectoires d'état sont presque identiques à ceux donnés par le même modèle en discrétisation peu affinée. La seule différence notable est la diminution de la quantité de produit à la sortie du réacteur. L'entrée, quant à elle, décroît de manière tout à fait similaire au modèle précédent, défini par  $D_a = 0,01$ ,  $v = 1$  et  $n = 100$ .

Lorsque  $D_a = 1$ ,  $v = 0,01$  et  $n = 100$ , nous obtenons les résultats suivants :

- l'algorithme s'exécute en 0,066741 secondes et nous fournit la matrice de gain

$$k_s = [1 \quad 0,9999 \quad 0 \quad \dots \quad 0] \in \mathbb{R}^{1 \times 200};$$

- les trajectoires d'état des systèmes et le graphe d'entrée sont fournis ci-dessous :

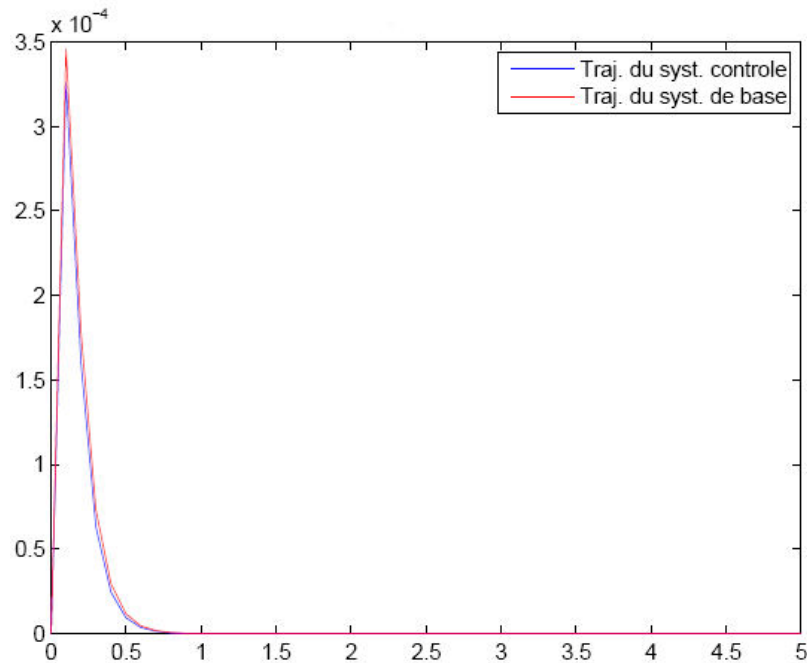


FIGURE 4.30 – Trajectoires d'état :  $D_a = 1$ ,  $v = 0,01$  et  $n = 100$

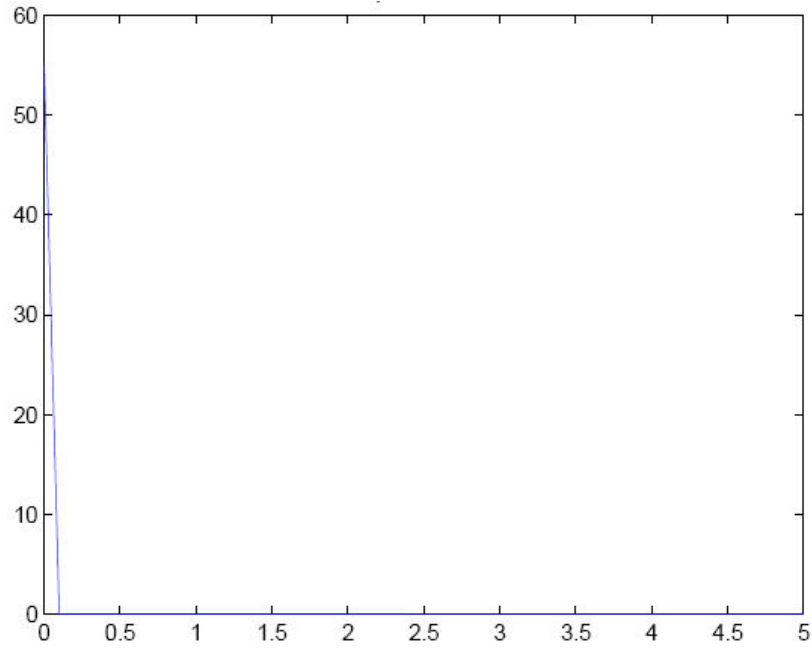


FIGURE 4.31 – Graphe d'entrée du système contrôlé :  $D_a = 1$ ,  $v = 0,01$  et  $n = 100$

La stabilisation des systèmes de base et contrôlé se fait très rapidement et de manière quasi-identique, les deux courbes étant presque confondues. L'entrée décroît de la même manière que pour les deux cas précédents, i.e. elle approche zéro en environ un dixième de seconde.

Comme nous l'avons fait pour notre analyse du modèle de réacteur à écoulement piston, nous avons choisi d'étudier comme équilibre l'équilibre nul, i.e. lorsque l'entrée et l'état sont nuls. Comme signalé précédemment, nous aurions pu étudier un autre équilibre, différent de l'équilibre nul. Le principe est identique pour ce modèle, aussi ne rentrerons-nous pas dans les détails.

Le graphe suivant représente la trajectoire d'état du système de base lorsque nous avons fixé notre entrée  $u = 55$ , avec les paramètres  $D_a = 0,1$ ,  $v = 0,1$  et  $n = 100$  :

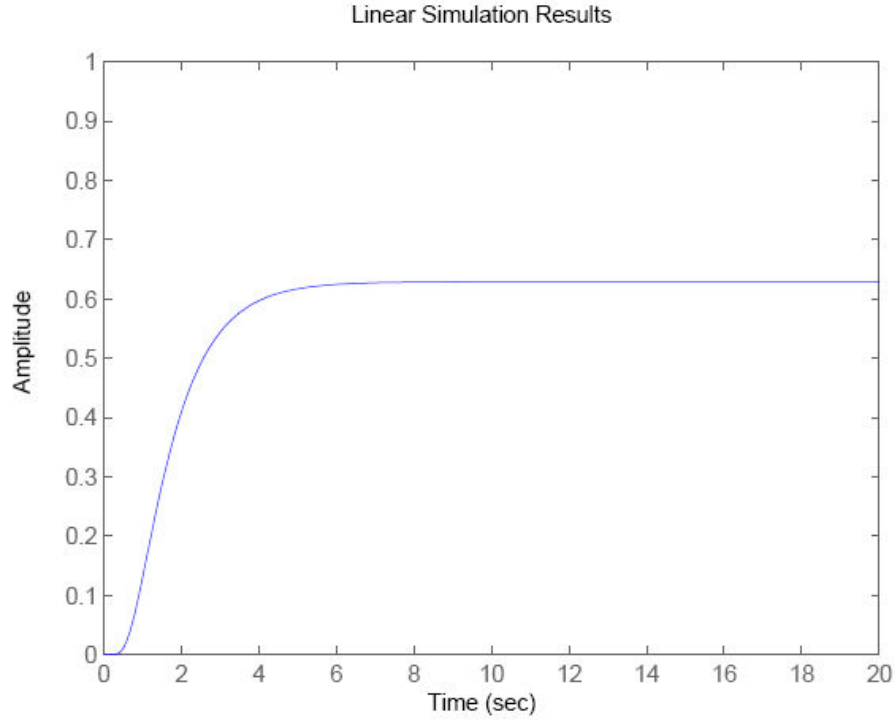


FIGURE 4.32 – Trajectoire d'état du système de base à entrée constante  $u = 55$  :  $D_a = 0,1$ ,  $v = 0,1$  et  $n = 100$

Nous pouvons voir à nouveau que la concentration de produit à la sortie du réacteur converge vers un équilibre différent de zéro. Le système mettra un peu moins de dix secondes pour se stabiliser complètement, sachant que le réactif a une vitesse superficielle de 0,1 m/s.

#### 4.4.2 Stabilisation du système perturbé

Nous désirons maintenant appliquer notre algorithme sur un système instable. Nous allons donc déstabiliser volontairement le système de base en modifiant la matrice  $A$  de telle sorte qu'au moins une de ses valeurs propres devienne positive.

Le morceau de code utilisé, que nous ajoutons dans le code global du programme juste après la définition des matrices du système, est le suivant :

```

%-----%
alpha = (1.1)*abs(min(real(eig(A))));
perturb = zeros(n);
perturb(1,1) = 1;
A = A + alpha*perturb
%-----%

```

Nous avons donc ajouté un poids "alpha" sur l'élément  $a_{11}$  pour déstabiliser le système tout en s'assurant qu'il reste stabilisable. Dans un premier temps, nous avons déstabilisé notre système en effectuant un *shift* des valeurs propres (nous avons pour cela perturbé toute la diagonale de la matrice  $A$  au moyen d'un même poids, ce qui explique notre choix pour la valeur de "alpha"), mais cela annihilait inévitablement la propriété de stabilisabilité. Nous nous sommes donc assuré de prendre un poids suffisamment grand pour que perturber l'élément  $a_{11}$  seul suffise à rendre le système instable. Notons bien que, si cela fonctionne dans ce cas précis, nous n'affirmons pas que cette valeur fonctionnerait pour tout autre système.

Premièrement, penchons-nous brièvement sur le comportement général du système perturbé, et ce via les graphes des réponses indicielle et impulsionnelle. Nous avons choisi comme paramètres  $D_a = 0$ ,  $v = 1$  et  $n = 50$ , et obtenons ainsi les graphes suivants :

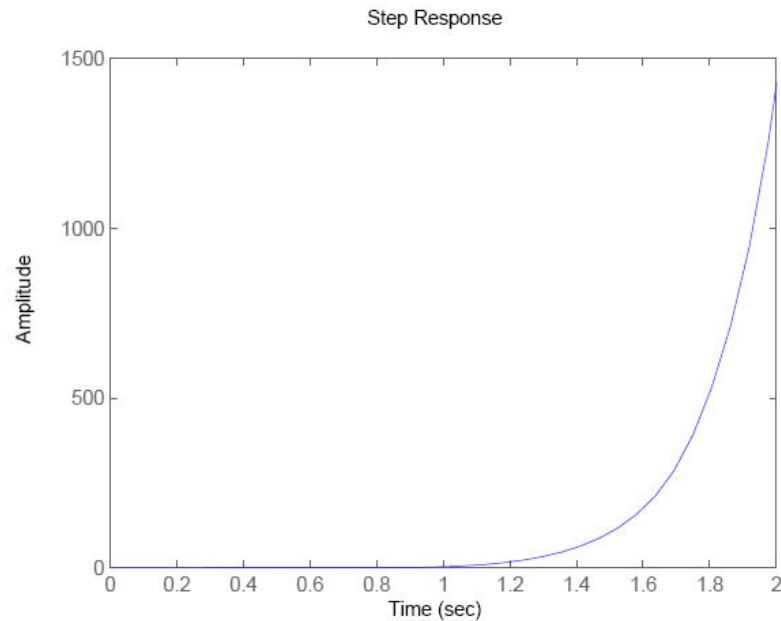


FIGURE 4.33 – Réponse indicielle du système perturbé :  $D_a = 0$ ,  $v = 1$  et  $n = 50$

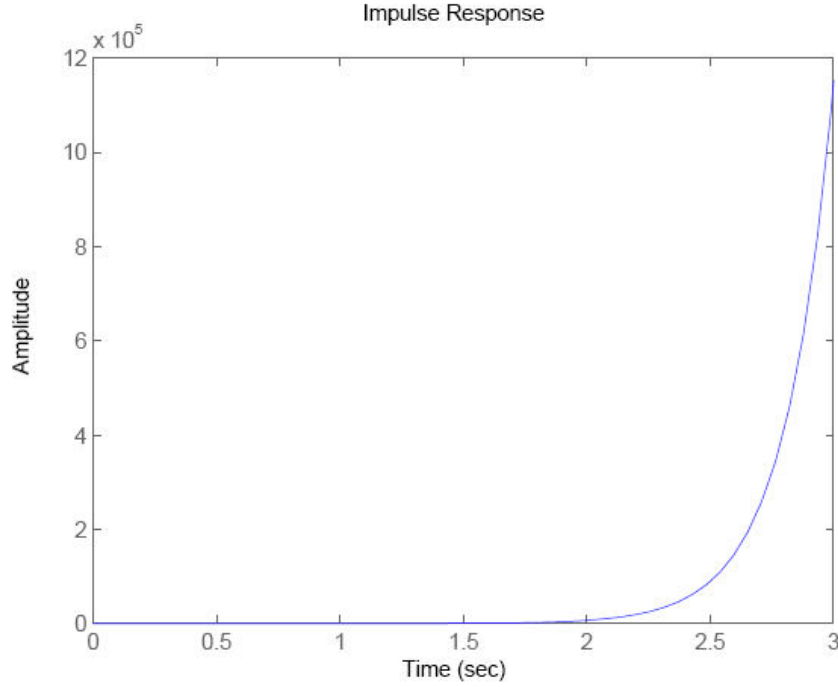


FIGURE 4.34 – Réponse impulsionnelle du système perturbé :  $D_a = 0$ ,  $v = 1$  et  $n = 50$

Nous voyons clairement qu'il n'y a plus convergence vers un équilibre, mais que la sortie diverge. Nous allons donc maintenant appliquer l'algorithme sur ce système et comparer les trajectoires d'état du système instable et du système contrôlé.

#### \* Modèle de réacteur à écoulement piston

Lorsque  $D_a = 0$ ,  $v = 0,01$  et  $n = 5$ , nous obtenons les résultats suivants :

- l'algorithme s'exécute en 0,008313 secondes et nous fournit la matrice de gain

$$k_s = [3, 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \in \mathbb{R}^{1 \times 10};$$

- la matrice perturbée possède une valeur propre positive  $\lambda_+ = 0,1050$  ;
- les trajectoires d'état des systèmes sont fournies ci-dessous :

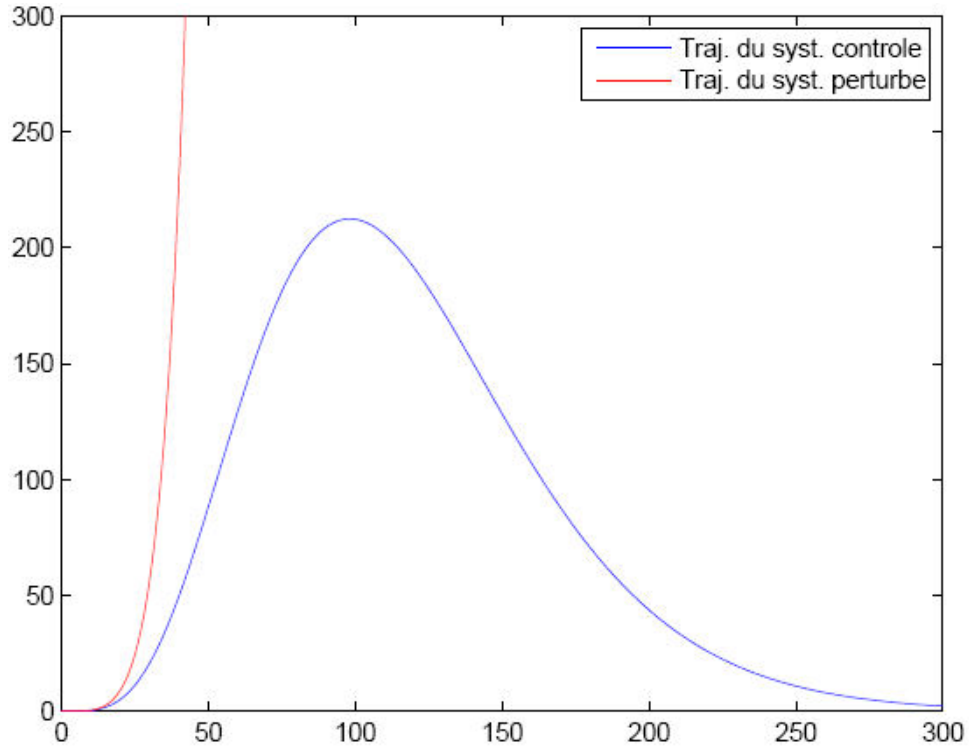


FIGURE 4.35 – Trajectoires d'état :  $D_a = 0$ ,  $v = 0,01$  et  $n = 5$

Nous pouvons voir que, dès l'instant où la concentration de produit à la sortie du réacteur augmente, la trajectoire du système perturbé diverge rapidement. Le système contrôlé, lui, va se stabiliser après un temps relativement important.

Lorsque  $D_a = 0$ ,  $v = 1$  et  $n = 5$ , nous obtenons les résultats suivants :

- l'algorithme s'exécute en 0,008103 secondes et nous fournit la matrice de gain

$$k_s = [1, 12 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \in \mathbb{R}^{1 \times 10};$$

- la matrice perturbée possède une valeur propre positive  $\lambda_+ = 0,6$  ;
- les trajectoires d'état des systèmes sont fournies ci-dessous :

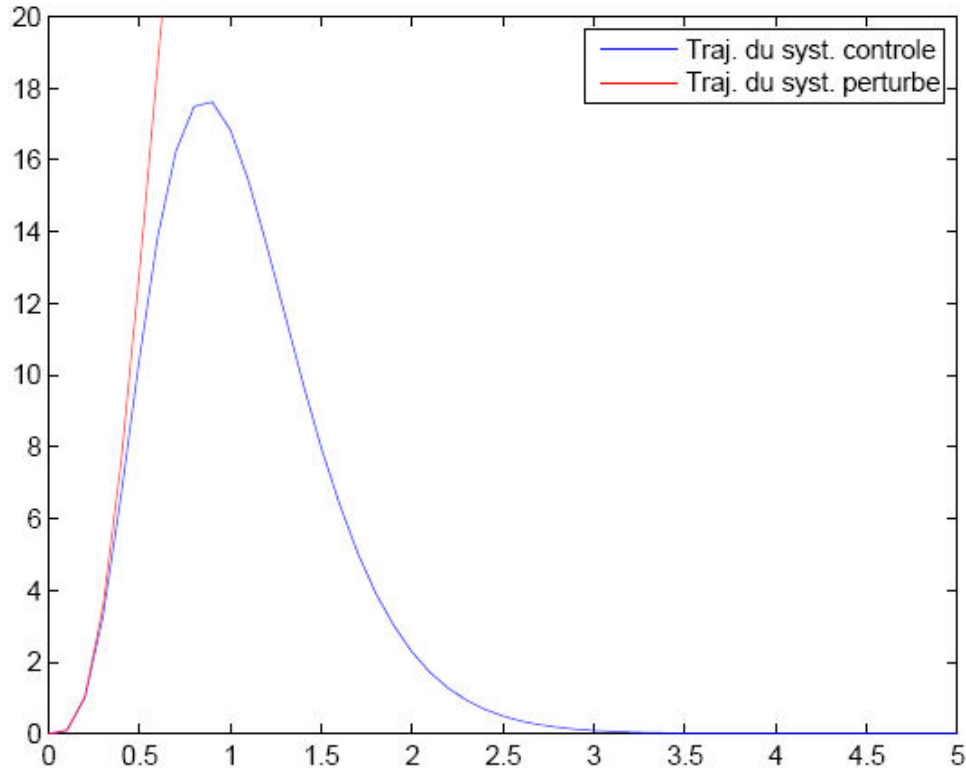


FIGURE 4.36 – Trajectoires d'état :  $D_a = 0$ ,  $v = 1$  et  $n = 5$

Pendant une demi-seconde, le comportement des deux systèmes reste fort similaire. Après cela, la trajectoire d'état du système perturbé va rapidement diverger, alors que celle du système contrôlé va se stabiliser en environ trois secondes.

Lorsque  $D_a = 0$ ,  $v = 0,01$  et  $n = 100$ , nous obtenons les résultats suivants :

- l'algorithme s'exécute en 0,019394 secondes et nous fournit la matrice de gain

$$k_s = [1, 2 \quad 0 \quad \dots \quad 0] \in \mathbb{R}^{1 \times 200};$$

- la matrice perturbée possède une valeur propre positive  $\lambda_+ = 0,2$ ;
- les trajectoires d'état des systèmes sont fournies ci-dessous :

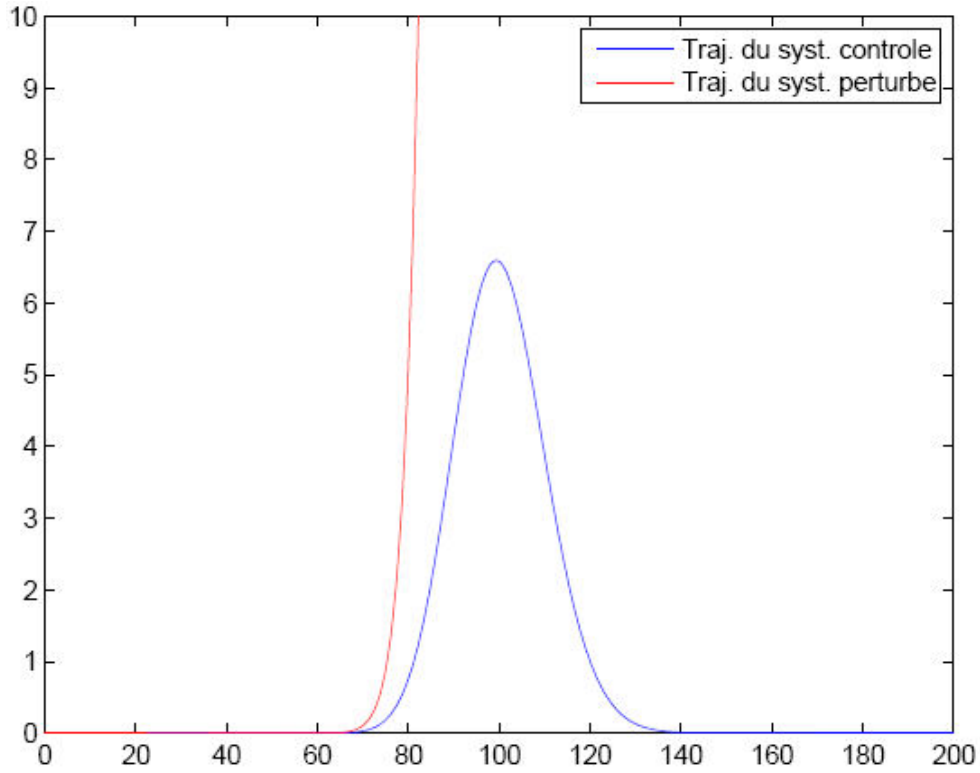


FIGURE 4.37 – Trajectoires d'état :  $D_a = 0$ ,  $v = 0,01$  et  $n = 100$

Une nouvelle fois, le système perturbé va diverger dès l'apparition de produit à la sortie du réacteur, alors que le système contrôlé va se stabiliser en un peu plus d'une minute.

Lorsque  $D_a = 0$ ,  $v = 1$  et  $n = 100$ , nous obtenons les résultats suivants :

- l'algorithme s'exécute en 0,063346 secondes et nous fournit la matrice de gain

$$k_s = [1, 101 \quad 0 \quad \cdots \quad 0] \in \mathbb{R}^{1 \times 200};$$

- la matrice perturbée possède une valeur propre positive  $\lambda_+ = 10,1$  ;
- les trajectoires d'état des systèmes sont fournies ci-dessous :



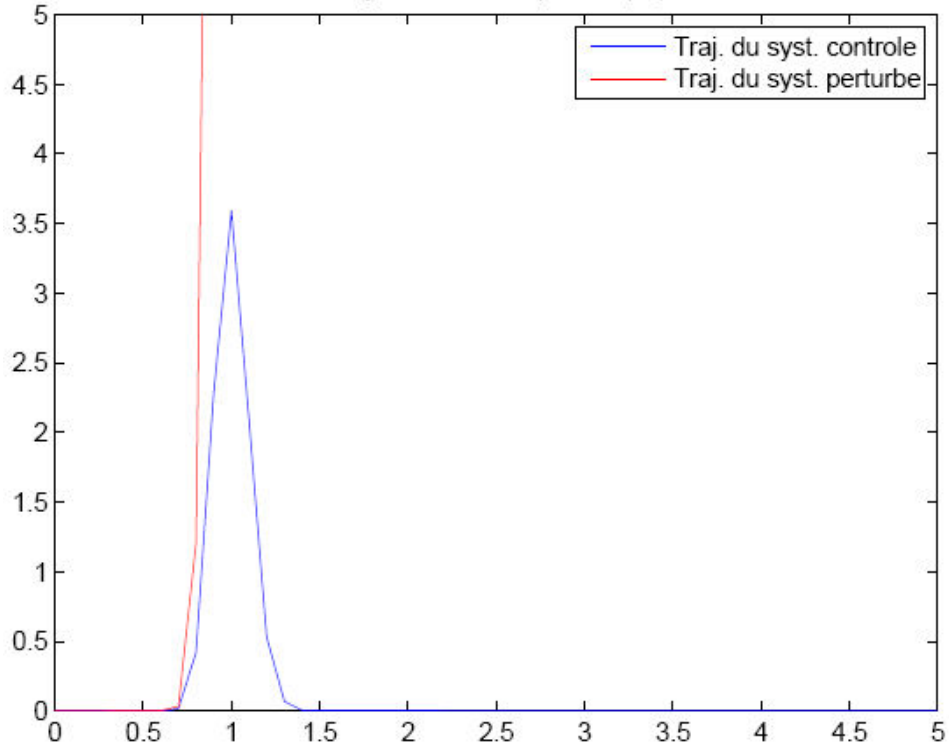


FIGURE 4.38 – Trajectoires d'état :  $D_a = 0$ ,  $v = 1$  et  $n = 100$

La trajectoire du système perturbé diverge de manière quasi-instantanée, là où celle du système contrôlé se stabilise très rapidement (en moins d'une seconde).

#### \* Modèle de réacteur à dispersion axiale

Lorsque  $D_a = 0,01$ ,  $v = 1$  et  $n = 5$ , nous obtenons les résultats suivants :

- l'algorithme s'exécute en 0,007911 secondes et nous fournit la matrice de gain

$$k_s = [1,5396 \quad 0,0476 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \in \mathbb{R}^{1 \times 10};$$

- la matrice perturbée possède une valeur propre positive  $\lambda_+ = 2,9734$ ;

- les trajectoires d'état des systèmes sont fournies ci-dessous :

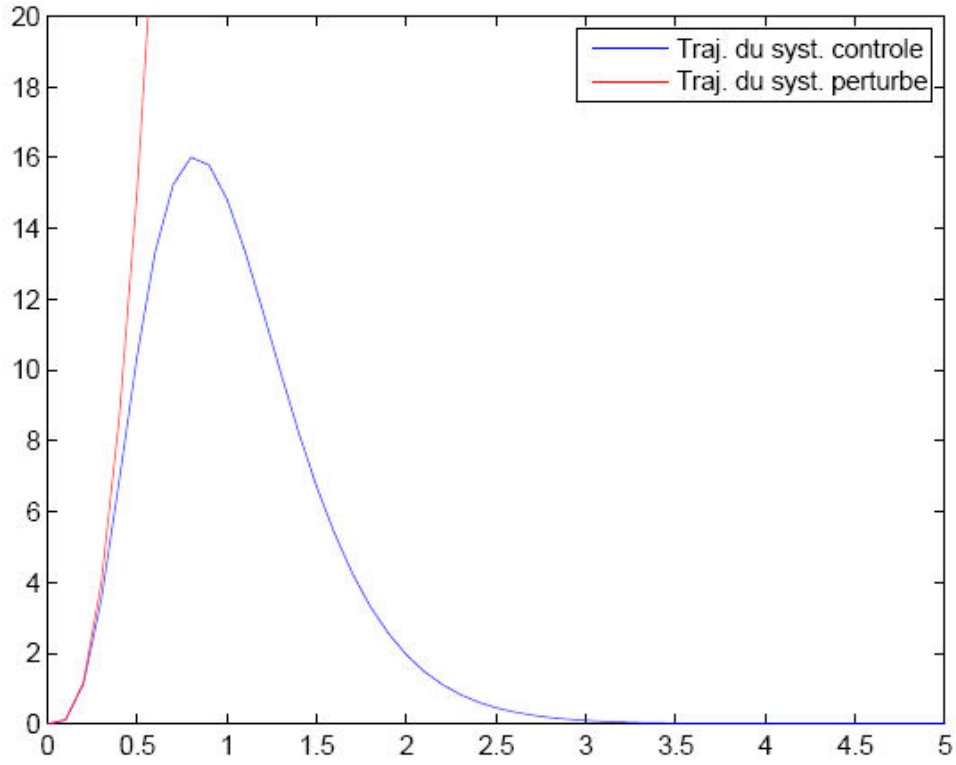


FIGURE 4.39 – Trajectoires d'état :  $D_a = 0,01$ ,  $v = 1$  et  $n = 5$

Les trajectoires des deux systèmes sont, une fois encore, fort proches jusqu'à un certain moment. La trajectoire du système perturbé va alors diverger alors que celle du système contrôlé va tendre vers zéro.

Lorsque  $D_a = 0,1$ ,  $v = 0,1$  et  $n = 5$ , nous obtenons les résultats suivants :

- l'algorithme s'exécute en 0,007900 secondes et nous fournit la matrice de gain

$$k_s = [2,9559 \quad 0,8333 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \in \mathbb{R}^{1 \times 10};$$

- la matrice perturbée possède une valeur propre positive  $\lambda_+ = 6,4742$ ;
- les trajectoires d'état des systèmes sont fournies ci-dessous :

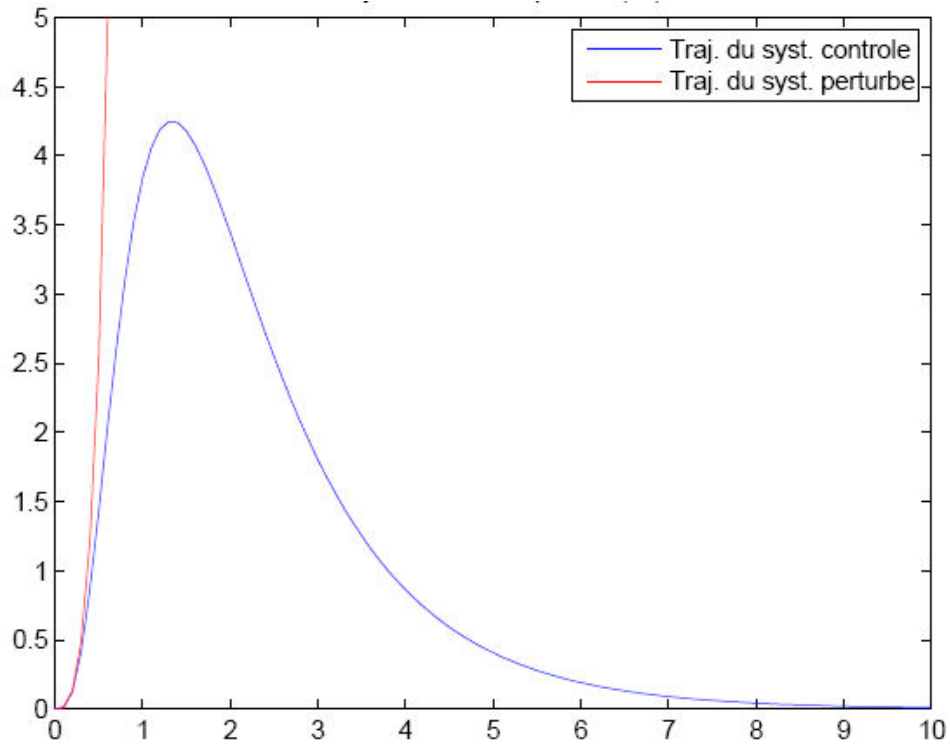


FIGURE 4.40 – Trajectoires d'état :  $D_a = 0,1$ ,  $v = 0,1$  et  $n = 5$

Le comportement des systèmes est identique à celui du cas précédent, à ceci près que le système contrôlé mettra un peu plus de temps à se stabiliser (dix secondes au lieu de trois).

Lorsque  $D_a = 1$ ,  $v = 0,01$  et  $n = 5$ , nous obtenons les résultats suivants :

- l'algorithme s'exécute en 0,009363 secondes et nous fournit la matrice de gain

$$k_s = [3,1071 \quad 0,9980 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \in \mathbb{R}^{1 \times 10};$$

- la matrice perturbée possède une valeur propre positive  $\lambda_+ = 58,8152$ ;
- les trajectoires d'état des systèmes sont fournies ci-dessous :

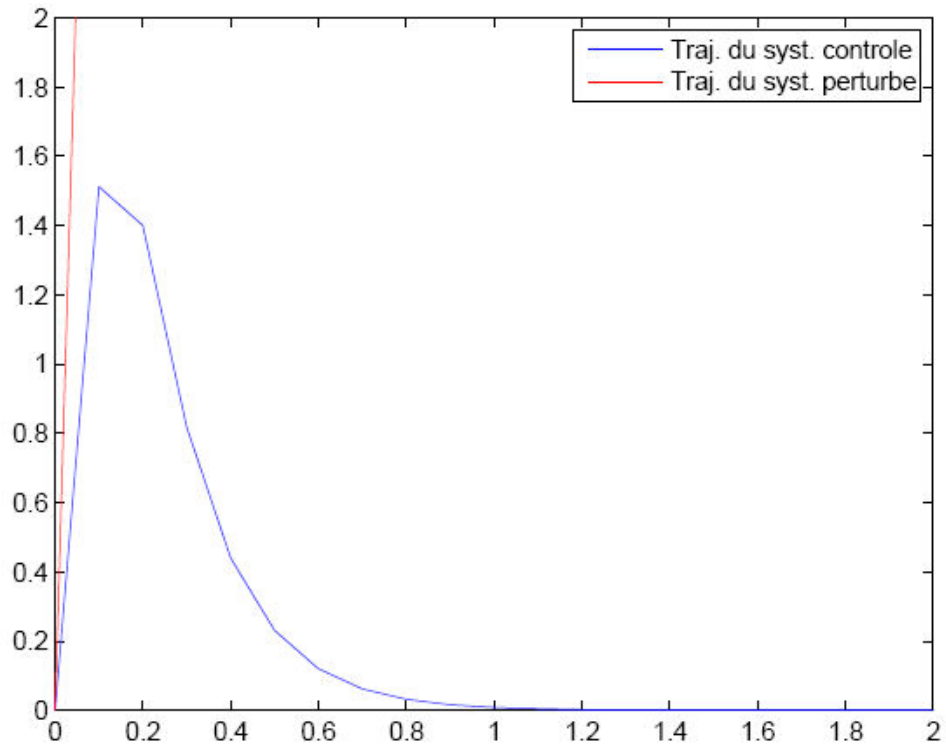


FIGURE 4.41 – Trajectoires d'état :  $D_a = 1$ ,  $v = 0,01$  et  $n = 5$

Nous pouvons voir que la trajectoire du système perturbé diverge immédiatement, contrairement à celle du système contrôlé qui se stabilise en à peine plus d'une seconde.

Lorsque  $D_a = 0,01$ ,  $v = 1$  et  $n = 100$ , nous obtenons les résultats suivants :

- l'algorithme s'exécute en 0,132855 secondes et nous fournit la matrice de gain

$$k_s = [2,7054 \quad 0,5 \quad 0 \quad \dots \quad 0] \in \mathbb{R}^{1 \times 200};$$

- la matrice perturbée possède une valeur propre positive  $\lambda_+ = 372,23$ ;
- les trajectoires d'état des systèmes sont fournies ci-dessous :

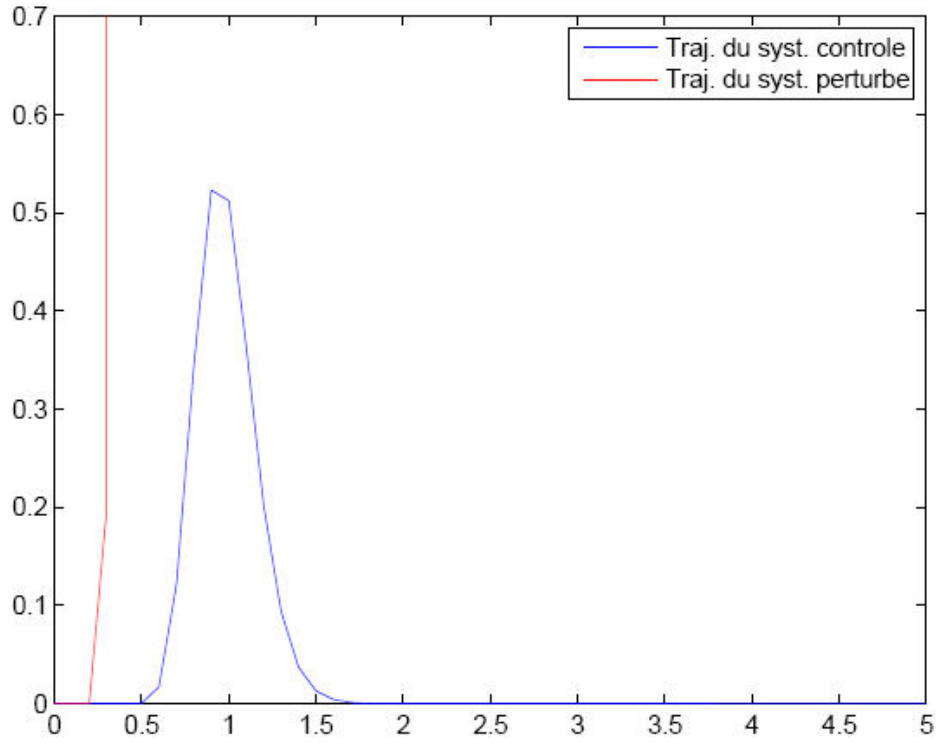


FIGURE 4.42 – Trajectoires d'état :  $D_a = 0,01$ ,  $v = 1$  et  $n = 100$

Ces trajectoires d'état sont comparables à celles du cas précédent : le système perturbé va diverger de manière immédiate alors que le système contrôlé va se stabiliser en un peu plus d'une seconde.

Lorsque  $D_a = 0,1$ ,  $v = 0,1$  et  $n = 100$ , nous obtenons les résultats suivants :

- l'algorithme s'exécute en 0,150841 secondes et nous fournit la matrice de gain

$$k_s = [3,3871 \quad 0,9901 \quad 0 \quad \cdots \quad 0] \in \mathbb{R}^{1 \times 200};$$

- la matrice perturbée possède une valeur propre positive  $\lambda_+ = 2639,4$ ;
- les trajectoires d'état des systèmes sont fournies ci-dessous :

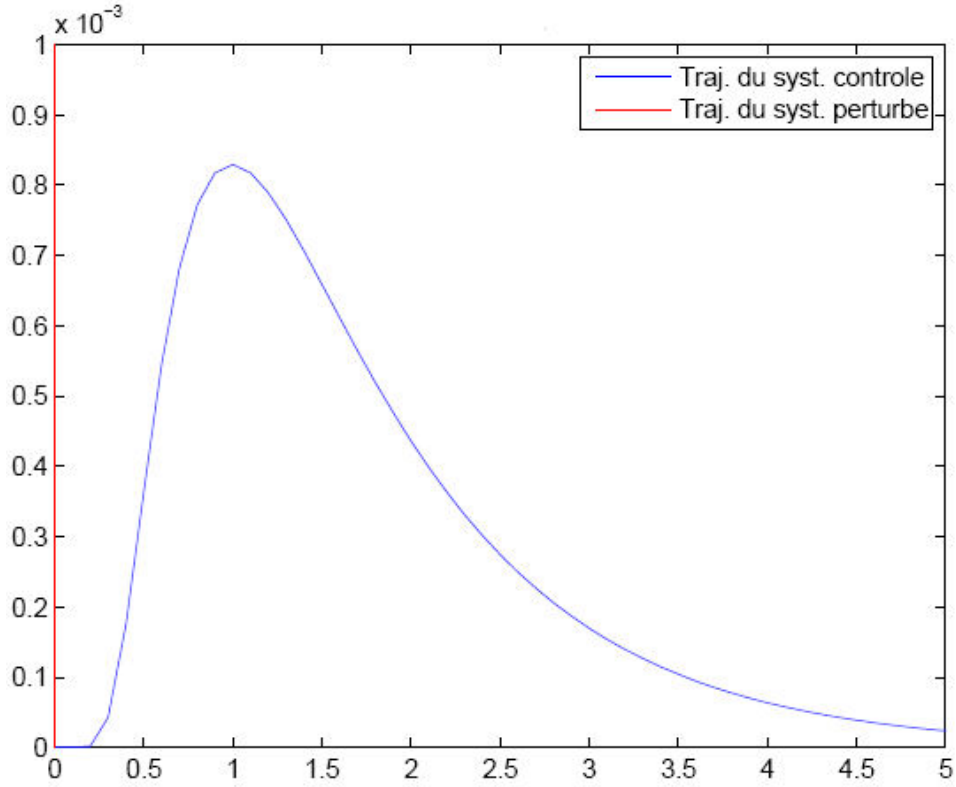


FIGURE 4.43 – Trajectoires d'état :  $D_a = 0, 1$ ,  $v = 0, 1$  et  $n = 100$

Le système contrôlé se stabilise plus ou moins rapidement. La trajectoire d'état du système perturbé, quant à elle, semble rester constamment "verticale" (d'un point de vue numérique) et se confond avec l'axe des ordonnées. Cela traduit une importante divergence de la trajectoire d'état et est du à la forte instabilité du système, mais également à l'échelle du graphe.

Lorsque  $D_a = 1$ ,  $v = 0,01$  et  $n = 100$ , nous obtenons les résultats suivants :

- l'algorithme s'exécute en 0,142694 secondes et nous fournit la matrice de gain

$$k_s = [3,3988 \quad 0,9999 \quad 0 \quad \cdots \quad 0] \in \mathbb{R}^{1 \times 200};$$

- la matrice perturbée possède une valeur propre positive  $\lambda_+ = 26264$  ;
- les trajectoires d'état des systèmes sont fournies ci-dessous :

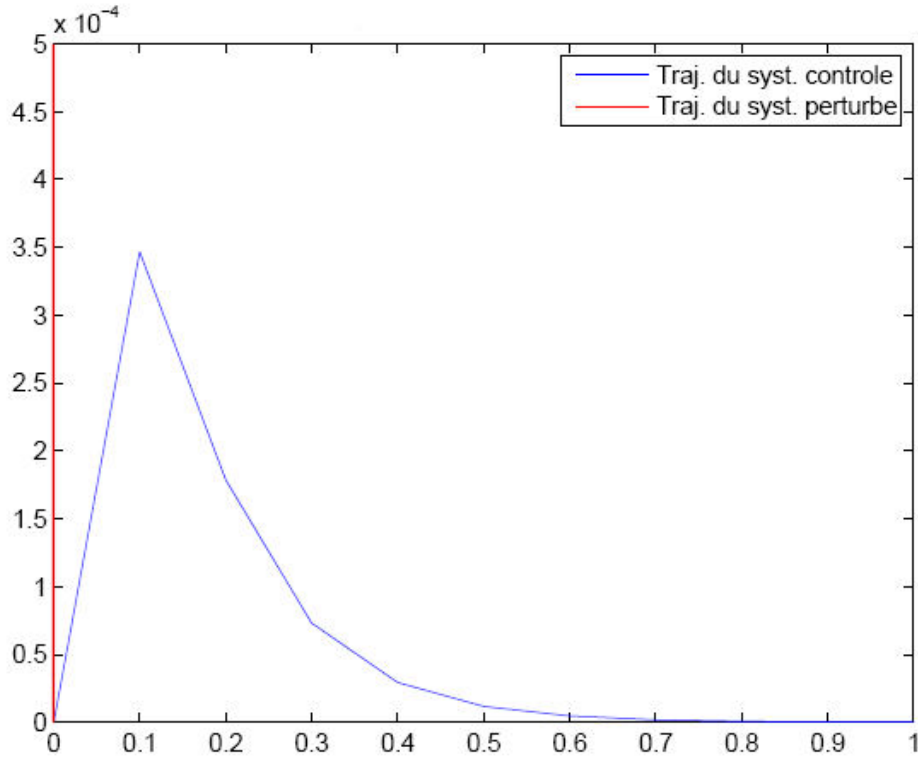


FIGURE 4.44 – Trajectoires d'état :  $D_a = 1$ ,  $v = 0,01$  et  $n = 100$

Les remarques sont les mêmes que pour le cas précédent : le système contrôlé se stabilise très vite alors que la trajectoire d'état du système perturbé diverge de manière substantielle (la courbe semble à nouveau se confondre avec l'axe des ordonnées à cause de la forte instabilité du système et de l'échelle du graphe).

Finalement, observons - pour le système contrôlé - le comportement des réactif et produit à travers le réacteur, pour différentes valeurs des paramètres  $D_a$ ,  $v$  et  $n$ . Cette étude se fera via de nouveaux graphes, grâce auxquels il nous sera possible de voir la variation des concentrations de réactif et de produit -  $x_1(z, t)$  et  $x_2(z, t)$  respectivement - en fonction du temps et de l'espace.

Lorsque  $D_a = 0$ ,  $v = 0,01$  et  $n = 5$ , nous obtenons les graphes suivants :

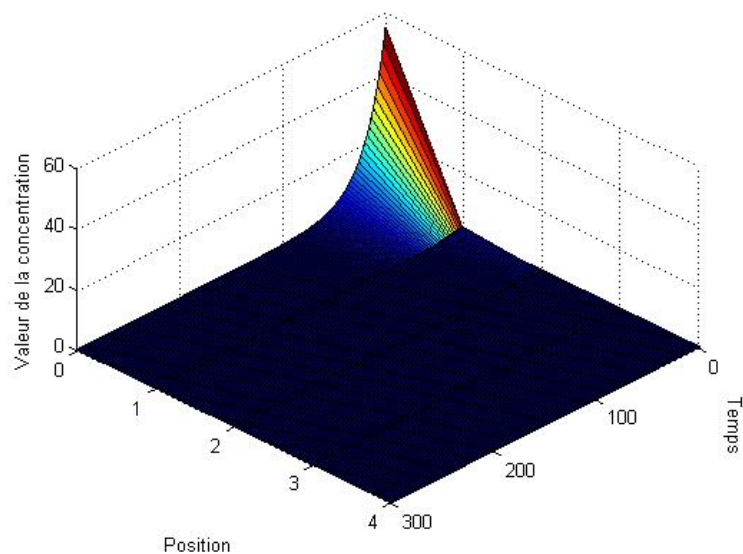


FIGURE 4.45 – Comportement du réactif :  $D_a = 0$ ,  $v = 0,01$  et  $n = 5$

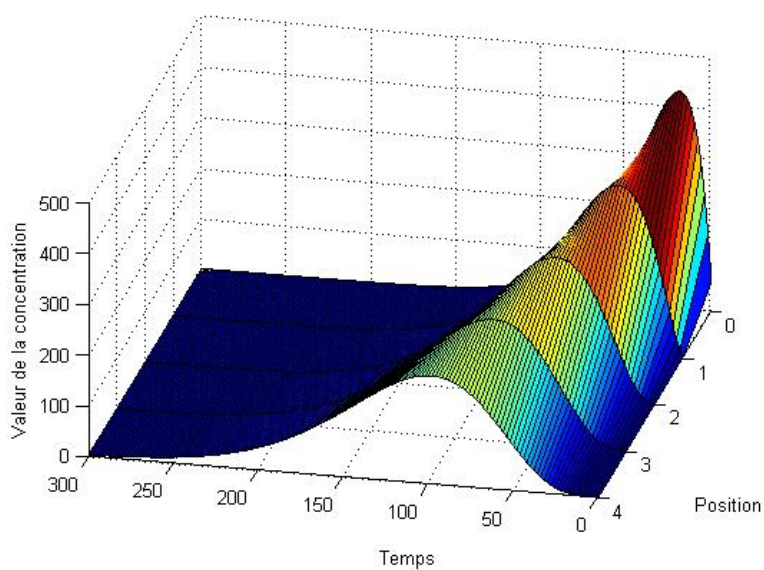


FIGURE 4.46 – Comportement du produit :  $D_a = 0$ ,  $v = 0,01$  et  $n = 5$



Lorsque  $D_a = 0$ ,  $v = 1$  et  $n = 5$ , nous obtenons les graphes suivants :

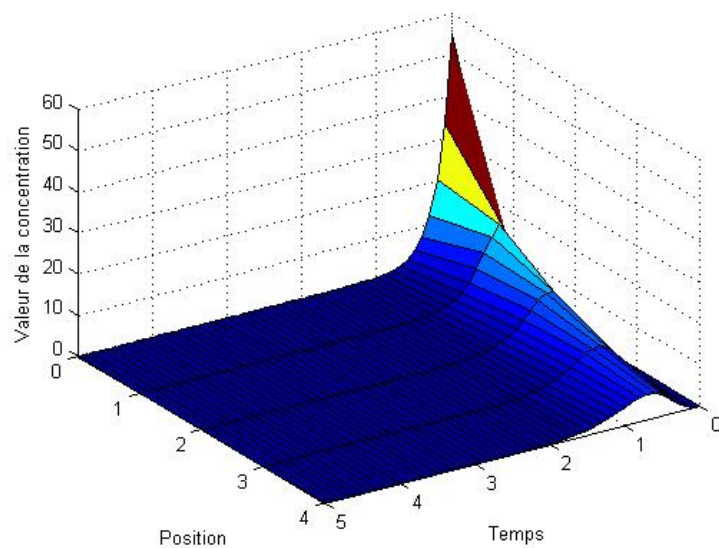


FIGURE 4.47 – Comportement du réactif :  $D_a = 0$ ,  $v = 1$  et  $n = 5$

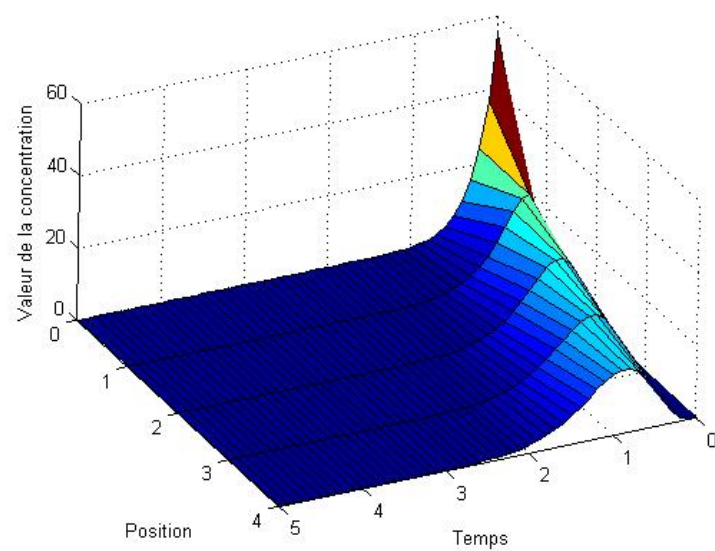


FIGURE 4.48 – Comportement du produit :  $D_a = 0$ ,  $v = 1$  et  $n = 5$

Lorsque  $D_a = 0$ ,  $v = 0,01$  et  $n = 100$ , nous obtenons les graphes suivants :

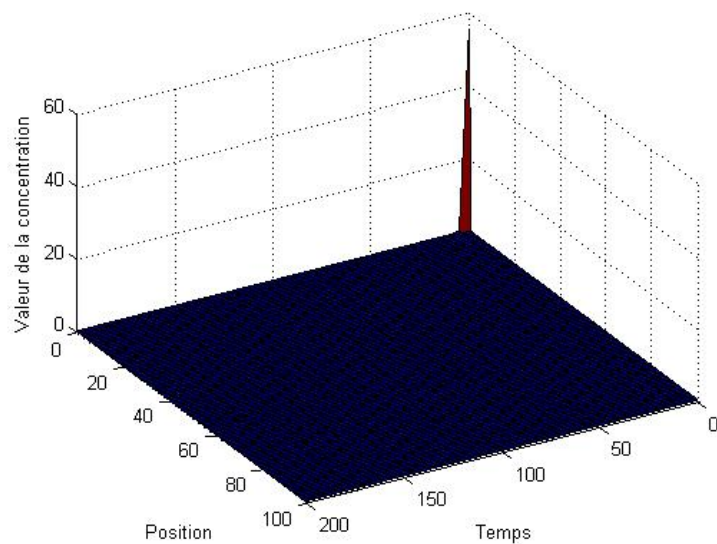


FIGURE 4.49 – Comportement du réactif :  $D_a = 0$ ,  $v = 0,01$  et  $n = 100$

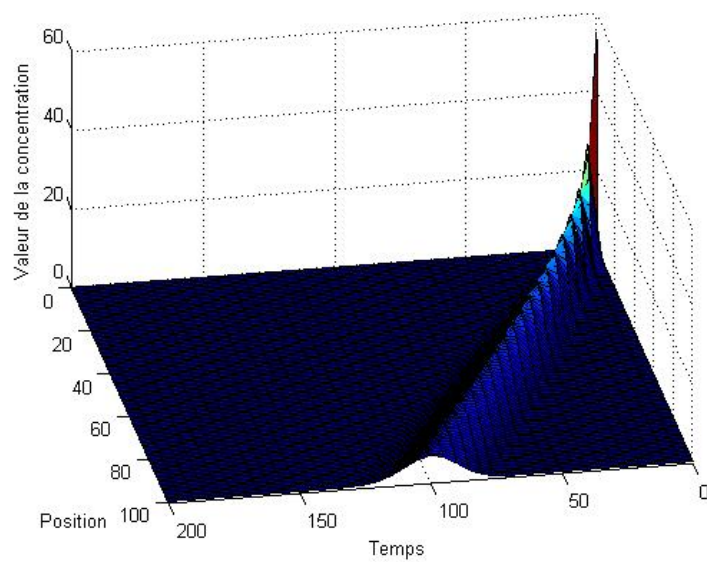


FIGURE 4.50 – Comportement du produit :  $D_a = 0$ ,  $v = 0,01$  et  $n = 100$

Lorsque  $D_a = 0$ ,  $v = 1$  et  $n = 100$ , nous obtenons les graphes suivants :

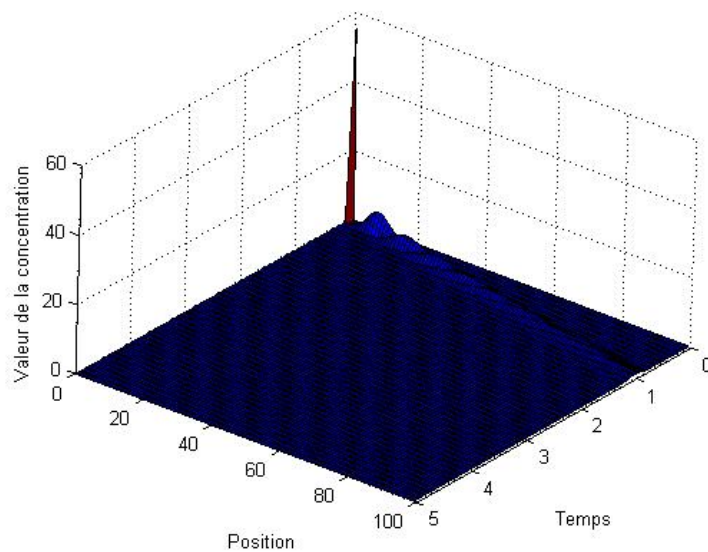


FIGURE 4.51 – Comportement du réactif :  $D_a = 0$ ,  $v = 1$  et  $n = 100$

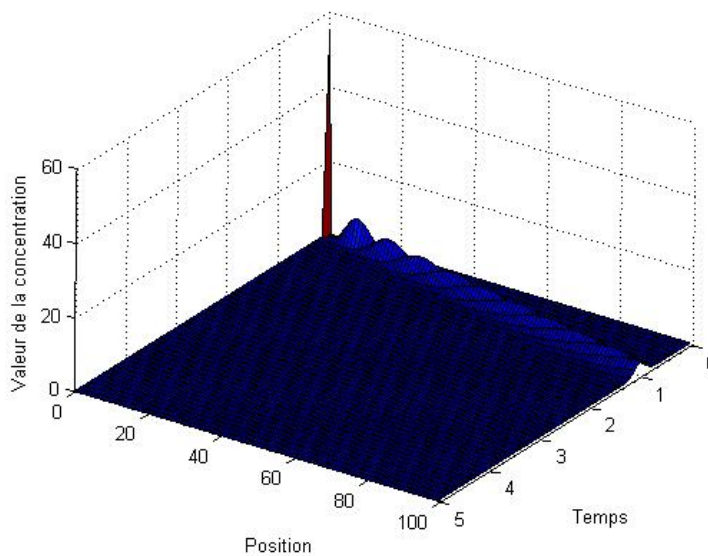


FIGURE 4.52 – Comportement du produit :  $D_a = 0$ ,  $v = 1$  et  $n = 100$

Lorsque  $D_a = 0,01$ ,  $v = 1$  et  $n = 5$ , nous obtenons les graphes suivants :

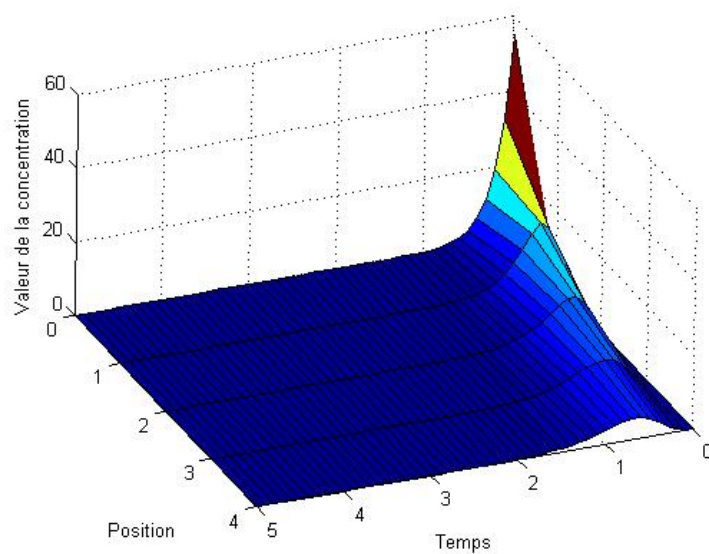


FIGURE 4.53 – Comportement du réactif :  $D_a = 0,01$ ,  $v = 1$  et  $n = 5$

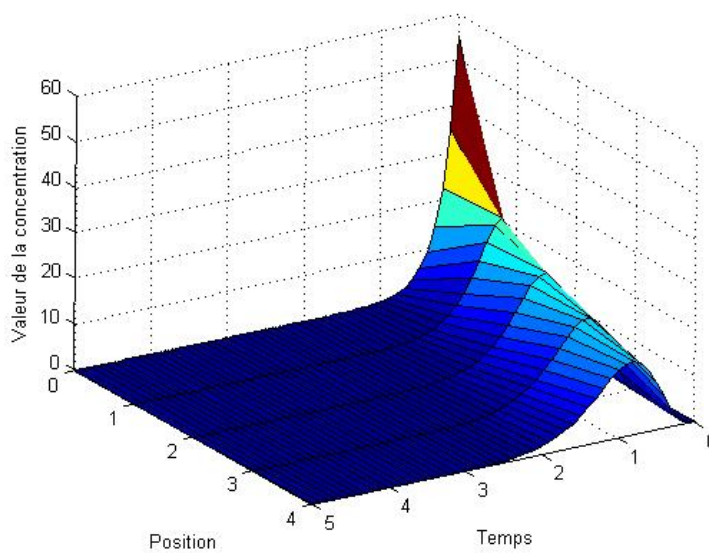


FIGURE 4.54 – Comportement du produit :  $D_a = 0,01$ ,  $v = 1$  et  $n = 5$

Lorsque  $D_a = 0,1$ ,  $v = 0,1$  et  $n = 5$ , nous obtenons les graphes suivants :

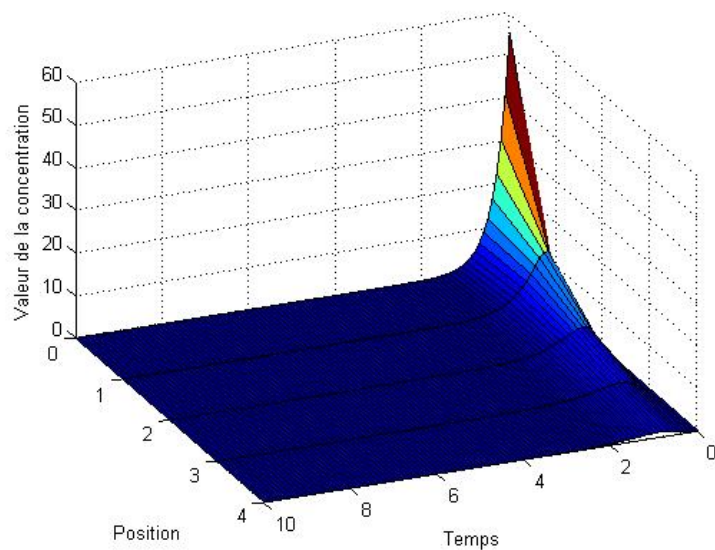


FIGURE 4.55 – Comportement du réactif :  $D_a = 0,1$ ,  $v = 0,1$  et  $n = 5$

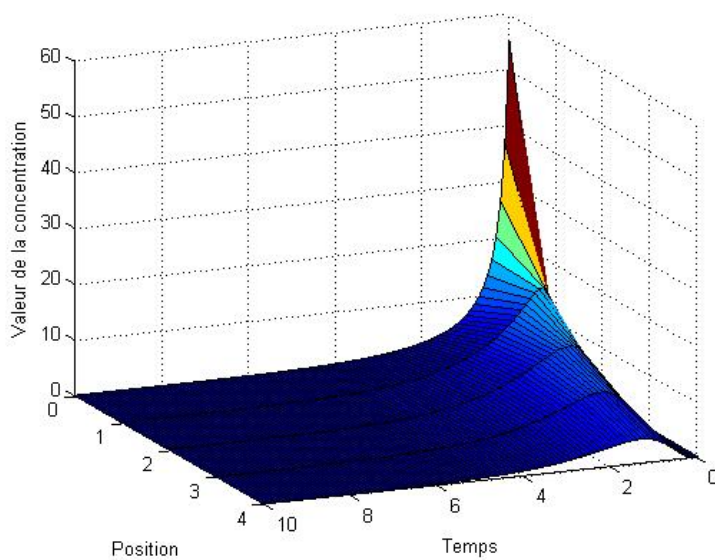


FIGURE 4.56 – Comportement du produit :  $D_a = 0,1$ ,  $v = 0,1$  et  $n = 5$

Lorsque  $D_a = 1$ ,  $v = 0,01$  et  $n = 5$ , nous obtenons les graphes suivants :

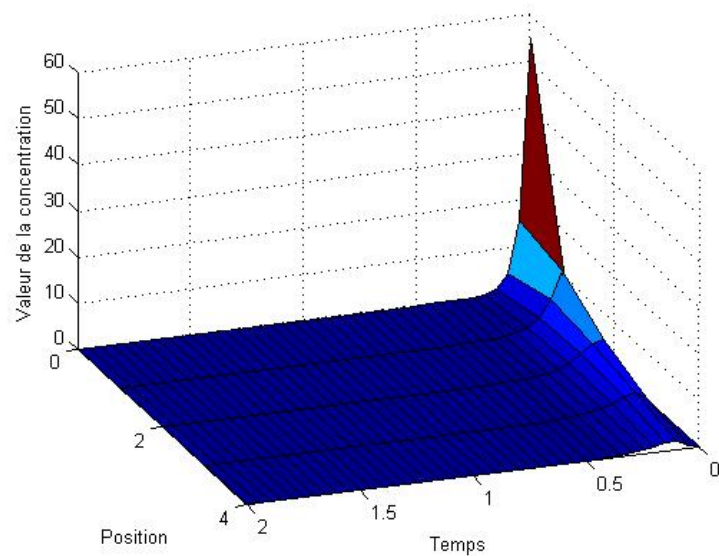


FIGURE 4.57 – Comportement du réactif :  $D_a = 1$ ,  $v = 0,01$  et  $n = 5$

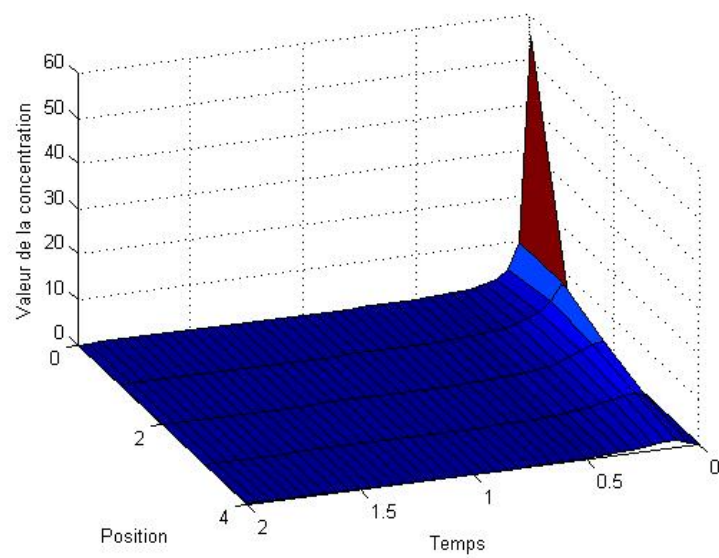


FIGURE 4.58 – Comportement du produit :  $D_a = 1$ ,  $v = 0,01$  et  $n = 5$



Lorsque  $D_a = 0,01$ ,  $v = 1$  et  $n = 100$ , nous obtenons les graphes suivants :

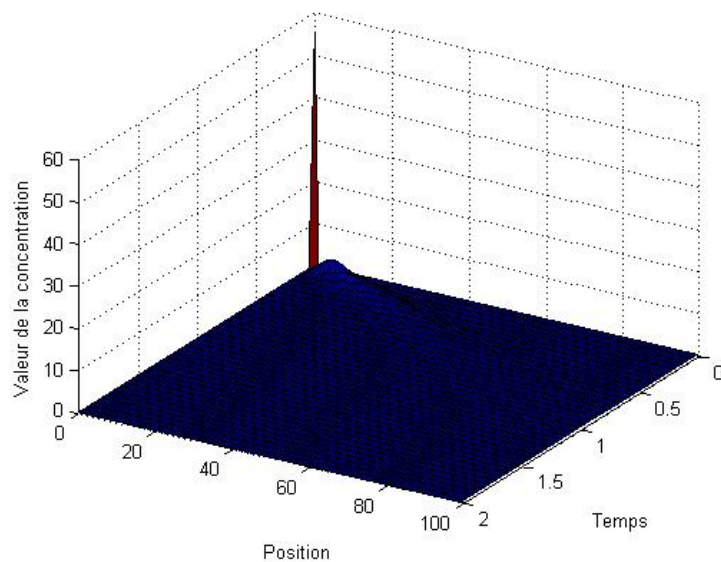


FIGURE 4.59 – Comportement du réactif :  $D_a = 0,01$ ,  $v = 1$  et  $n = 100$

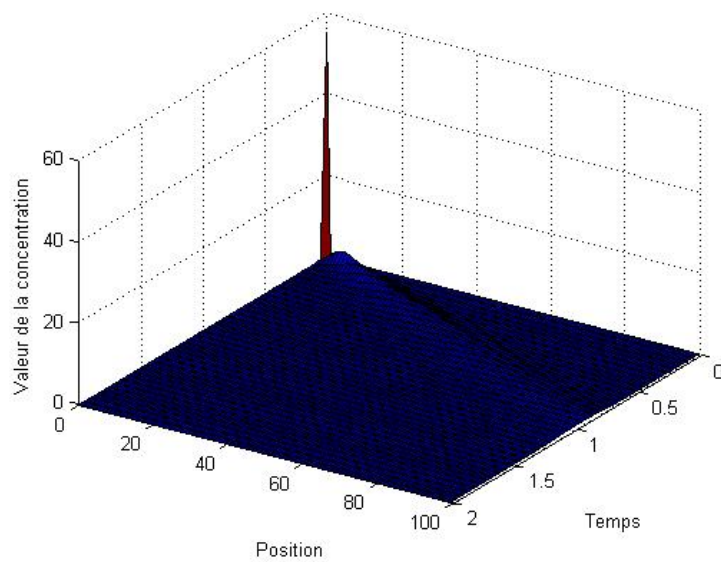


FIGURE 4.60 – Comportement du produit :  $D_a = 0,01$ ,  $v = 1$  et  $n = 100$

Lorsque  $D_a = 0,1$ ,  $v = 0,1$  et  $n = 100$ , nous obtenons les graphes suivants :

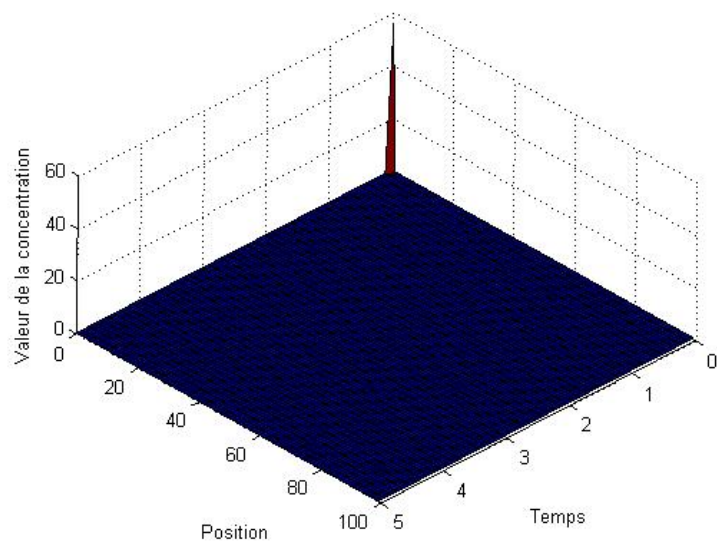


FIGURE 4.61 – Comportement du réactif :  $D_a = 0,1$ ,  $v = 0,1$  et  $n = 100$

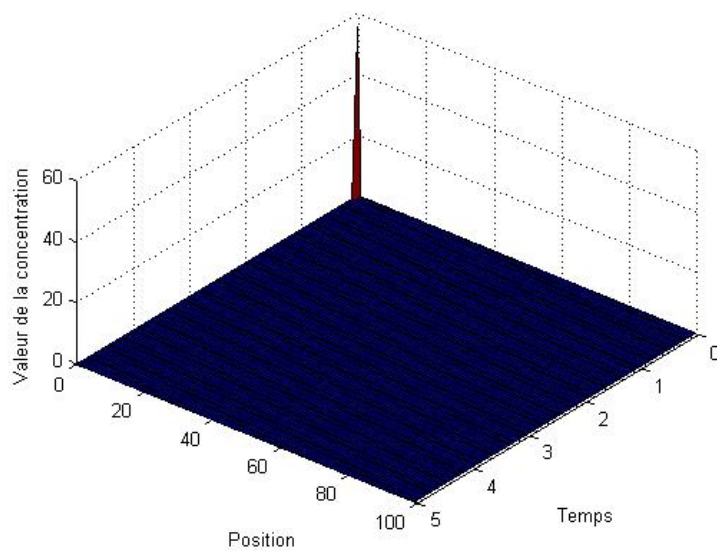


FIGURE 4.62 – Comportement du produit :  $D_a = 0,1$ ,  $v = 0,1$  et  $n = 100$



Lorsque  $D_a = 1$ ,  $v = 0,01$  et  $n = 100$ , nous obtenons les graphes suivants :

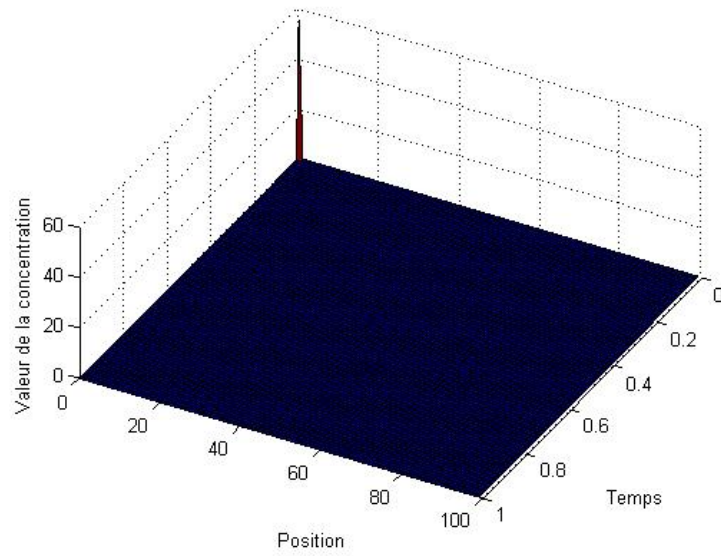


FIGURE 4.63 – Comportement du réactif :  $D_a = 1$ ,  $v = 0,01$  et  $n = 100$

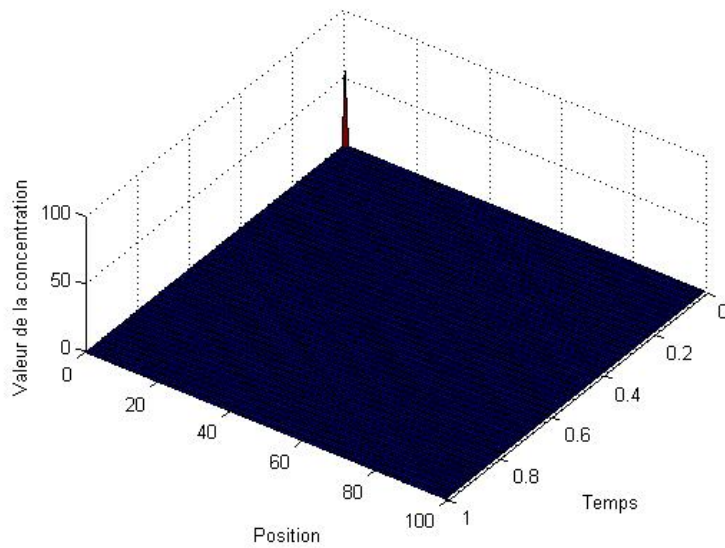


FIGURE 4.64 – Comportement du produit :  $D_a = 1$ ,  $v = 0,01$  et  $n = 100$

Les graphes des comportements des réactif et produit sont en accord avec nos analyses précédentes, cela étant notamment visible si nous les comparons avec les graphes des trajectoires d'état.

Finalement, nous concluons ce chapitre avec la remarque suivante :

**Remarque 4.3.** *Nous avons pu constater que le schéma de construction de la matrice de gain que nous avons utilisé - provenant de [9] (voir théorèmes 2.1 et 3.1) - présente des avantages et des inconvénients.*

*La fonction "Place", en MATLAB, permet également de générer une matrice de gain, tout en donnant la possibilité à l'utilisateur de choisir lui-même les valeurs propres de la matrice en boucle fermée. Remarquons cependant que cette fonction est beaucoup plus coûteuse que l'algorithme que nous avons conçu, et n'est clairement pas adaptée pour des problèmes de grande dimension (voire même de dimension modérée, à partir du moment où l'utilisateur doit fournir lui-même toutes les valeurs propres de la matrice en boucle fermée).*

*L'algorithme que nous avons implémenté ne nous permet certes pas de choisir "à quel point le système en boucle fermée sera stable", mais s'exécute de manière quasi-instantanée (comme nous avons pu le voir grâce à la fonction "Tic-Toc"), même pour des problèmes de plus grande taille.*

*Il revient donc à l'utilisateur de juger quelle méthode sera la mieux adaptée pour le système qu'il étudiera.*

# Conclusion

Dans les trois premiers chapitres, nous avons donc étudié en détail une approche au problème de stabilisation positive très peu considérée jusqu'à présent. Nous avons ainsi fourni des conditions nécessaires et suffisantes pour la stabilisabilité de systèmes LTI positifs, en distinguant bien le cas des systèmes SISO (une seule entrée et une seule sortie) de celui des systèmes MIMO (plusieurs entrées et plusieurs sorties). Nous avons alors construit un algorithme assez simple permettant de tester la stabilisabilité positive de systèmes LTI positifs et, éventuellement, de générer une matrice de gain stabilisant positivement le système. Nous pouvons résumer son fonctionnement de la sorte : si le système étudié possède une matrice  $B$  à lignes unitaires, alors nous pouvons construire la matrice de gain en nous basant uniquement sur les éléments des matrices  $A$  et  $B$  ; si ce n'est pas le cas, alors nous utilisons la méthode des polytopes et des sommets. Notons bien que nous nous sommes principalement concentré sur la stabilisation de systèmes via asservissement de l'état ; il serait intéressant d'approfondir l'étude théorique en développant également les notions de stabilisation de l'état estimé et de stabilisation de sortie.

Dans le quatrième chapitre, nous avons analysé le comportement d'un système LTI positif SISO particulier, à savoir deux modèles de réacteur tubulaire - le réacteur à écoulement piston et le réacteur à dispersion axiale. Nous avons ainsi étudié le comportement du système de base via les graphes des réponses indicielle et impulsionnelle, nous avons comparé les trajectoires d'état du système de base et celles du système contrôlé via la théorie développée dans les trois premiers chapitres, et nous avons perturbé intentionnellement notre système de base dans le but de lui faire perdre sa propriété de stabilité, de telle sorte que nous puissions appliquer notre algorithme stabilisant sur un système instable cette fois. Nous avons donc bien pu voir comment s'appliquent - en pratique - les résultats de l'article source des trois premiers chapitres (B. Roszak et E. J. Davison [9]) sur un système LTI positif SISO. Nous avons également pu remarquer, en intégrant dans notre programme les commandes "Tic-Toc" permettant de calculer le temps d'exécution d'une routine - que le schéma de construction présenté dans le théorème 2.1 (ou d'une manière plus générale, dans le théorème 3.1) est très peu coûteux en terme

de ressources et de temps, même pour des systèmes de grande dimension.

Nous pourrions maintenant envisager de coder complètement l'algorithme 3.1 (et non plus seulement le schéma de construction SISO) dans l'optique d'étudier numériquement des systèmes positifs MIMO. Nous aurions ainsi la possibilité de voir le fonctionnement en pratique de la méthode des polytopes, et de se faire une idée du coût - faible ou non - qu'une telle méthode peut engendrer. Cela n'a pu être réalisé dans ce mémoire par manque de temps, mais pourrait éventuellement servir de prolongement à cette étude.

# Bibliographie

- [1] P. W. Atkins et L. Jones, *Principes de chimie*, De Boeck, Bruxelles, 2008.
- [2] N. Avaert, *Systèmes dynamiques linéaires non négatifs*, Mémoire de 2<sup>e</sup> licence en sciences mathématiques, Facultés universitaires Notre-Dame de la Paix, Namur, 1999-2000.
- [3] C. Beauthier, *Le problème Linéaire-Quadratique positif*, Mémoire de DEA, Facultés universitaires Notre-Dame de la Paix, Namur, 2006.
- [4] E. Benoît, *Equations différentielles*, Ecole CIMPA, Tlemcen, 2008.
- [5] V. Chellaboina, S. P. Bhat, W. M. Haddad et D. S. Bernstein, Modeling and Analysis of Mass-Action Kinetics, *IEEE Control Systems Magazine*, 2009, pp. 60-78.
- [6] R. Haberman, *Applied Partial Differential Equations with Fourier Series and Boundary Value Problems*, Pearson Education, New Jersey, 2004.
- [7] R. A. Horn et C. R. Johnson, *Matrix Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 1985.
- [8] A. Lemaître, *Mécanique des fluides*, Notes de cours à l'usage des étudiants mathématiciens de Bac 3, Facultés universitaires Notre-Dame de la Paix, Namur, 2010.
- [9] B. Roszak et E.J. Davison, Necessary and sufficient conditions for stabilizability of positive LTI systems, *Systems & Control Letters*, Vol. 58, 2009, pp. 474-481.
- [10] J. Winkin, *Systèmes, Contrôle et Optimisation*, Notes de cours à l'usage des étudiants mathématiciens de Master 1, Facultés universitaires Notre-Dame de la Paix, Namur, 2009.
- [11] J. Winkin, D. Dochain et P. Ligarius, Dynamical analysis of distributed parameter tubular reactors, *Automatica*, Vol. 36, 2000, pp. 349-361.

# Annexe

```
% = = = = = %
%      DEHAYE Jonathan      %
%      MASTER 2             %
%      Janvier 2011         %
% = = = = = %
%      ALGORITHME :         %
% test de la stabilisabilité et %
% étude numérique du système %
% = = = = = %

%-----%
% Ce programme est divisé en trois parties distinctes :
%
% * la première décrit simplement les différents paramètres et
%   matrices du système ; l'utilisateur peut les changer à sa guise
%   s'il souhaite tester différentes combinaisons ;
%
% * la deuxième permet de vérifier la stabilisabilité du système et
%   de fournir - si le système est bien stabilisable - une matrice
%   de gain Ks stabilisante ; ces résultats proviennent de (1) ;
%
% * la troisième concerne la dynamique du système : elle génère des
%   graphes de trajectoires d'état, d'entrée, de réponse indicielle
%   et de réponse impulsionnelle.
%-----%
%-----%
% REMARQUE : Le programme nécessite certaines conditions pour
%            fonctionner. La matrice B doit impérativement être une
%            matrice à lignes unitaires. De plus, les résultats ne
%            seront valables que si le système est linéaire positif
%            (A doit être une matrice de Metzler et B, C et D
%            être des matrices positives).
```

```

%
%           Le but principal de ce programme, dans le cadre de ce
%           mémoire, est d'étudier le système décrit dans (2),
%           i.e. les modèles de réacteurs tubulaires.
%-----%

%-----%
% sources :
%   (1) "Necessary and sufficient conditions for stabilizability
%         of positive LTI systems" - B. Roszak & J. Davison ;
%   (2) "Dynamical analysis of distributed parameter tubular
%         reactors" - J. Winkin, D. Dochain & P. Ligarius.
%-----%

%=====
%==== BEGIN =====
%=====

close all
clear all
clc

% ----- %
% EXEMPLE %
% ----- %

% Il s'agit d'un exemple donné dans (1), nous permettant de tester
% facilement le programme

% A = [0 1 1 ; 1 0 2 ; 1 0 -3]

% B = [1 0 ; 0 1 ; 1 0]

% n = 3;
% m = 2;

% ----- %

```

```

%== PARTIE 1 =====%

% ----- %
% PARAMETRES %
% ----- %

L = 1;      % longueur du réacteur
b = 1;      % coefficient stoechiométrique
v = 0.1;    % vitesse superficielle du fluide
Da = 0.1;   % coefficient de dispersion axiale
k0 = 1;     % constante cinétique

N = 100;    % nombre de pas de discrétisation

n = 2*N ;   % dimensions des matrices
m = 1;
r = 1;

delta = L/N; % longueur du pas de discrétisation
delta2 = delta^2;

d1 = v/delta;
d2 = Da/delta2;

% ----- %

% ----- %
% MATRICES DU SYSTEME DISCRETISE %
% ----- %

for i=1:N
    tempdiag(i) = -d1 - 2*d2 - k0;
end
for i=1:N-1
    tempsub(i) = d1 + d2;
    tempup(i) = d2;
end

A11 = diag(tempdiag,0) + diag(tempsub,-1) + diag(tempup,1);

```



```

A21 = b*k0*eye(N);
A22 = A11 + k0*eye(N);

A = [A11 zeros(N) ; A21 A22];

B = d1 + d2;

for i=2:n
    B(i) = 0;
end

B = B';

C = zeros(r,n);
C(r,n) = 1;

D = zeros(r,m);

% Déstabilisation du système %
% ----- %

% Pour pouvoir tester l'algorithme provenant de (1) (i.e. test de
% la stabilisabilité du système et construction d'une matrice de
% gain si possible) sur un système instable, nous souhaitons - à un
% certain moment - déstabiliser le système de base en ajoutant un
% poids "alpha" (> 0) sur l'élément A(1,1) tel qu'au moins une
% valeur propre de la nouvelle matrice A soit positive...

% eig(A)

% alpha = (1.1)*abs(min(real(eig(A)))));

% perturb = zeros(n);
% perturb(1,1) = 1;

% A = A + alpha*perturb

% eig(A)

% ----- %

```

```

%== PARTIE 2 =====%

% ----- %
% STABILISABILITE DU SYSTEME %
% ----- %

tic          % on calcule le temps d'exécution de la routine

CONST = 1;   % CONST est la constante à ajouter pour obtenir
              % l'inégalité  $K(i,j) > A(i,i) / B(j,i)$  dans le cas
              % où  $B(j,i)$  est le seul élément non nul de la
              % colonne  $B(:,i)$ 

test = 0;

for i=1:n     % test pour voir si B a des lignes unitaires ou non
    subtest = 0;
    for j=1:m
        if(B(i,j)~=0)
            subtest = subtest + 1;
        end
    end
    if(subtest > 1)
        test = test + 1;
    end
end

if(test==0)   % si B a des lignes unitaires...
    for i=1:m % on construit la matrice Ks selon le théorème
        for j=1:n
            Btest = 0;          % on vérifie si tous les éléments de la
            for l=1:n           % colonne  $B(:,i)$  différents de  $B(j,i)$ 
                if(B(l,i)~=0)% sont nuls
                    Btest = Btest + 1;
                end
            end
        end
    end
end

```

```

        end
    end
    if(B(j,i)~=0)
        Btest = Btest - 1;
    end

    if(Btest == 0)    % si les autres éléments valent tous 0

        if(A(i,i) >= -CONST)
            Ks(i,j) = (A(j,j)/B(j,i)) + CONST;
        else
            Ks(i,j) = CONST;
        end

    else    % si les autres éléments ne valent pas tous 0

        ktest = [];
        for(r=1:n)
            if(r~=j && B(r,i)~= 0)
                ktest = [ktest A(r,j)/B(r,i)];
            end
        end
        Ks(i,j) = min(ktest);

    end

end

end

SOL = A - B*Ks;

Metztest = 0;    % on vérifie si A-BKs est une matrice de Metzler
for i=1:n
    for j=1:n
        if(j~=i && SOL(i,j)<0)
            Metztest = 1;
        end
    end
end

Stabtest = 0;    % on vérifie si A-BKs est une matrice stable

```

```

eigen = eig(SOL);
for i=1:n
    if(eigen(i)>=0)
        Stabtest = 1;
    end
end

if(Metztest == 0 && Stabtest == 0)
    disp('La matrice A-BKs est une matrice de Metzler stable ;')
    disp('le système est donc stabilisable...')
    disp('Notre matrice de gain Ks est')
    Ks
else
    disp('La matrice A-BKs n''est PAS une matrice de Metzler
        stable ;')
    disp('le système n''est donc PAS stabilisable!')
end

else % si B n'a pas des lignes unitaires...
    disp('Erreur : votre matrice B ne possède pas des lignes
        unitaires');
end

toc

% ----- %

%== PARTIE 3 =====%

% ----- %
% DYNAMIQUE DU SYSTEME %
% ----- %

% Trajectoires d'état %
% ----- %

sys = ss(A,B,C,D);% on définit le système

```

```

for i=1:n
    x0(i) = 0;    % on pose les variables d'état initiales
end
x0(1) = 55;
x0(n/2+1) = 55;
x0 = x0';

i = 1;           % on calcule x(t) pour le système en boucle fermée
for t=0:0.1:10
    x(:,i) = expm((A-B*Ks)*t)*x0;
    i=i+1;
end

i = 1;           % on calcule x(t) pour le système de base
for t=0:0.1:10
    x2(:,i) = expm(A*t)*x0;
    i=i+1;
end

t = 0:0.1:10;    % on définit le vecteur de temps

figure(1)         % on trace les trajectoires d'état
plot(t,x(n,:))
hold on
plot(t,x2(n,:), 'r')
% axis([0 10 0 10])
title('Trajectoires d''etat pour x2(zn)')
legend('Traj. du syst. controle', 'Traj. du syst. de base')

i = 1;           % on calcule u(t) pour le système en boucle fermée
for t=0:0.1:10
    u(i) = Ks*expm((A-B*Ks)*t)*x0;
    i=i+1;
end

t = 0:0.1:10;    % on définit le vecteur de temps

figure(2)         % on trace le graphe d'entrée
plot(t,u(1,:))
title('Graphes d''entree')

```

```

% Comportement des réactif et produit %
% en fonction du temps et de l'espace %
% ----- %

% z = 0:N-1;
% t = 0:0.1:10;

% figure(1)
% surf(t,z,x(1:N,:))
% xlabel('Temps')
% ylabel('Position')
% zlabel('Valeur de la concentration')

% figure(2)
% surf(t,z,x(N+1:n,:))
% xlabel('Temps')
% ylabel('Position')
% zlabel('Valeur de la concentration')

% Trajectoires d'état à entrée constante %
% ----- %

t = 0:0.1:20;    % vecteur de temps

for i = 1:length(t)    % on fixe l'entrée constante
    u(i) = 55;
end

figure(3)
lsim(sys,u,t,x0)
% axis([0 20 0 1])

% Réponse indicielle %
% ----- %

G = tf(sys)

figure(4)

```

```
step(G)
```

```
% Réponse impulsionnelle %  
% ----- %
```

```
figure(5)  
impulse(sys)
```

```
% ----- %
```

```
%===== %  
%===  END  ===== %  
%===== %
```